

SP-1329:* ÁLGEBRA HOMOLÓGICA

Joseph C. Várilly

Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica

I Ciclo Lectivo del 2018

Introducción

En 1956, Henri Cartan y Samuel Eilenberg publicaron su libro clásico *Homological Algebra*, para hacer una síntesis – muy exitosa – de la profusión de invariantes algebraicas que habían surgido en la topología y la geometría diferencial durante el medio siglo anterior. Lograron extraer la esencia algebraica de esas teorías, formando así una nueva rama del álgebra. Sin embargo, esa síntesis resultó ser solo el inicio de una familia de homología y cohomología generalizadas, con contribuciones de la geometría algebraica, la física teórica y la teoría general de categorías.

Este curso pretende ser una introducción a ese panorama, empezando por las bases de la co/homología de R -módulos y de la teoría de categorías, seguido por una inspección de diversas co/homologías particulares: homología singular, cohomología de de Rham, cohomología de grupos, co/homología de Hochschild y co/homología cíclica de álgebras. El prerrequisito esencial es un buen curso de álgebra (grupos y anillos).

Jean Dieudonné escribió una historia detallada de la topología (algebraica y diferencial) en la primera mitad del siglo XX. En ella, identifica el origen de la “homología clásica” en los trabajos de Henri Poincaré sobre su *analysis situs* a partir de 1895. Poincaré trató de clasificar ciertas partes de \mathbb{R}^n (variedades diferenciales, en esencia) mediante ciertas “homologías” entre subvariedades. Eso fue el comienzo de una teoría sistemática ahora llamada topología algebraica, que clasifica espacios topológicos mediante ciertos invariantes algebraicos, sus *grupos de homología*. El trabajo de tesis de Georges de Rham (1931) acerca de las formas diferenciales resaltó una teoría dual llamada *cohomología*. Ya para entonces, se disponía de varias recetas para construir invariantes de ambos tipos: la síntesis de Cartan y Eilenberg logró extraer la esencia algebraica de tales construcciones.

A partir de 1942, Eilenberg y su colega Saunders MacLane identificaron una estructura general en los cálculos cohomológicos que les permitió distinguir entre isomorfismos “naturales”

*La sigla SP-1329 es (por ahora) ficticia. Para efectos administrativos, la designación oficial de este curso es “SP-1308: Tópicos Especiales en Matemática”.

y “no naturales”, dando lugar a la idea de un *funtor* entre tales estructuras, que ellos bautizaron “categorías”. Su concepto clave era el de una “transformación natural” entre funtores. Muy rápidamente, este nuevo lenguaje permitió sistematizar el álgebra de las homologías y cohomologías, y poco tiempo después fue aprovechado por Alexandre Grothendieck (1958) para rehacer la geometría algebraica en su formulación moderna.

Hoy en día, el álgebra homológica es una teoría algebraica que se nutre de esas raíces históricas pero a la vez tiene nuevas ramificaciones. Por un lado, han surgido co/homologías generalizadas, como la K -teoría topológica que subyace el teorema del índice de Atiyah y Singer, o la cohomología cíclica de Connes y Tsygan que permite hablar de “formas diferenciales no conmutativas”. Por otro lado, las categorías han emergido como una teoría algebraica autónoma, tan básico como los grupos y anillos, que no se reduce a un mero catálogo de ejemplos.

Este curso pretende ser una introducción sistemática a ese panorama.

Temario

Prolegómenos sobre R -módulos Módulos sobre un anillo R , complejos de módulos, sucesiones exactas cortas, los lemas de 5 y de 3×3 , sucesiones exactas largas en homología.

Categorías y funtores Definición y ejemplos de categorías. Funtores y transformaciones naturales. Funtores representables, el lema de Yoneda. Límites y colímites, productos y coproductos, pullbacks y pushouts. Núcleos y conúcleos, categorías abelianas. Funtores adjuntos, la adjunción entre los funtores $(- \otimes_R M)$ y $\text{Hom}_S(M, -)$.

Resoluciones y funtores derivados Módulos proyectivos e inyectivos. Resoluciones de un módulo, funtores derivados izquierdos y derechos. Extensiones, productos de torsión. La fórmula de Künneth para complejos de cadenas.

Ejemplos de homologías y cohomologías La homología singular de un espacio topológico. Cohomología de de Rham de una variedad diferencial. Complejos de Koszul de anillos conmutativos. Cohomología de grupos y extensiones de grupos. Homología y cohomología de Hochschild de un álgebra asociativa. Cohomología cíclica de un álgebra asociativa y su relación con la cohomología de Hochschild. Cohomología de Čech y la clasificación de fibrados de línea.

Bibliografía

Los siguientes libros elaboran los temas del curso desde diversos puntos de vista.

- [1] D. J. Benson, *Representations and Cohomology*, 2 tomos, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [2] H. Cartan and S. Eilenberg, *Homological Algebra*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1956.
- [3] J. A. Dieudonné, *A History of Algebraic and Differential Topology 1900–1960*, Birkhäuser, Boston, 1989.
- [4] P. Etingof, S. Gelaki, D. Nikshych & V. Ostrik, *Tensor Categories*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2015.
- [5] S. I. Gelfand & Y. I. Manin, *Methods of Homological Algebra*, Springer, Berlin, 2003.
- [6] P. J. Hilton & U. Stammbach, *A Course in Homological Algebra*, Springer, New York, 1971.
- [7] N. Jacobson, *Basic Algebra II*, Dover, Mineola, NY, 1989.
- [8] G. Kato, *The Heart of Cohomology*, Springer, Dordrecht, 2006.
- [9] S. Lang, *Algebra* (parte IV), 3ª edición, Addison-Wesley, Reading, MA, 1993.
- [10] J.-L. Loday, *Cyclic Homology*, Springer, Berlin, 1992.
- [11] S. MacLane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer, New York, 1998.
- [12] S. MacLane, *Homology*, Springer, Berlin, 1995.
- [13] D. G. Northcott, *An Introduction to Homological Algebra*, Cambridge University Press, Cambridge, 1960.
- [14] M. S. Osborne, *Basic Homological Algebra*, Springer, New York, 2000.
- [15] E. Riehl, *Category Theory in Context*, Dover Books, Mineola, NY, 2016.
- [16] L. R. Vermani, *An Elementary Approach to Homological Algebra*, Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, FL, 2003.
- [17] C. A. Weibel, *An Introduction to Homological Algebra*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

Índice General

Introducción	1
1 Módulos sobre un anillo	1-1
1.1 Anillos y módulos	1-1
1.2 Sucesiones exactas	1-8
1.3 Complejos y homología	1-12
1.4 Ejercicios sobre R -módulos	1-19
2 Categorías y funtores	2-1
2.1 Categorías: definición y ejemplos	2-1
2.2 Funtores y transformaciones naturales	2-6
2.3 Límites y colímites, propiedades universales	2-16
2.4 Categorías abelianas	2-23
2.5 Funtores adjuntos	2-28
2.6 Ejercicios sobre categorías y funtores	2-33
3 Resoluciones y funtores derivados	3-1
3.1 Módulos proyectivos e inyectivos	3-1
3.2 Resoluciones proyectivas	3-6
3.3 Funtores derivados	3-10
3.4 Extensiones de R -módulos	3-15
3.5 El teorema de Künneth	3-19
3.6 Ejercicios sobre resoluciones y funtores derivados	3-28
4 Ejemplos de homologías y cohomologías	4-1
4.1 Homología singular de espacios topológicos	4-1
4.2 La cohomología de de Rham de variedades	4-8
4.3 Complejos de Koszul	4-24
4.4 Cohomología de grupos	4-29
4.5 Cohomología de álgebras asociativas	4-34
4.6 Cohomología de Čech	4-45
4.7 Ejercicios sobre homologías y cohomologías	4-52

1 Módulos sobre un anillo

A famous exercise from Serge Lang's influential textbook Algebra [1965, p. 105] reads: "Take any book on homological algebra, and prove all the theorems without looking at the proofs given in that book." (In later editions of the book Lang takes a more moderate position; see Lang [1993].)

— David Eisenbud

Los objetos del álgebra homológica son ciertos “grupos de homología” y las relaciones entre ellos. Una de sus fuentes es la topología combinatorial, donde los espacios que admiten triangulaciones obedecen ciertas relaciones combinatorias; otra fuente es el álgebra conmutativa que subyace la geometría algebraica. En ambos casos los manejos algebraicos usados para clasificar las estructuras de la teoría presentan muchos rasgos en común. Resulta útil estudiar esos manejos algebraicos con eventuales aplicaciones en diversos contextos: ese estudio abstracto es el tema de este curso.

1.1 Anillos y módulos

Un **anillo** R es un *grupo abeliano* (con suma) y a la vez un *monoide* (con producto), con leyes distributivas que ligán las dos operaciones: $a(b + c) = ab + ac$, $(a + b)c = ac + bc$. La suma es conmutativa pero el producto podría ser conmutativo o no. Cabe recordar que un monoide es un semigrupo con una identidad multiplicativa 1. Los elementos especiales 0 y 1 son distintos, con la única excepción del anillo trivial $R = \{0\}$.¹

Un **homomorfismo de anillos** $f: R \rightarrow S$ es una aplicación que preserva las operaciones de suma y producto, y también respeta la identidad:

$$f(a + b) = f(a) + f(b), \quad f(ab) = f(a)f(b), \quad f(1) = 1.$$

Un homomorfismo biyectivo es un *isomorfismo*. Si existe un isomorfismo de R en S , dicese que los anillos R y S son *isomorfos*.

Ejemplo 1.1. El conjunto \mathbb{Z} de los **números enteros** es un anillo conmutativo.

Un *cuerpo* \mathbb{F} es un anillo conmutativo (no nulo) donde todo elemento no cero es invertible: el monoide multiplicativo es el grupo abeliano $\mathbb{F}^\times := \mathbb{F} \setminus \{0\}$. Ejemplos de cuerpos son \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} : respectivamente, los números racionales, reales y complejos.

¹ Antes de 1960 se admitía el concepto de un “anillo sin identidad” donde la estructura multiplicativa es solo un semigrupo. Bajo la influencia de Bourbaki, esa costumbre fue abandonada; en este curso todos los anillos poseen identidades, conservadas bajo homomorfismos de anillos.

Los polinomios sobre \mathbb{F} en un indeterminado t forman el anillo $\mathbb{F}[t]$. Este anillo conmutativo es **entero**, es decir, no posee *divisores de cero*: si $p(t), q(t) \in \mathbb{F}[t] \setminus \{0\}$, donde $p(t) = a_0 + a_1t + \cdots + a_nt^n$ y $q(t) = b_0 + b_1t + \cdots + b_mt^m$ con $a_n \neq 0, b_m \neq 0$ en \mathbb{F} , entonces

$$p(t)q(t) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)t + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)t^2 + \cdots + a_nb_mt^{n+m},$$

así que $a_nb_m \neq 0$ en \mathbb{F} y por lo tanto $p(t)q(t) \neq 0$ en $\mathbb{F}[t]$. Además, el anillo $\mathbb{F}[t]$ es **principal**: cada ideal de $\mathbb{F}[t]$ es de la forma $(r(t)) := \{p(t)r(t) : p(t) \in \mathbb{F}[t]\}$; en otras palabras, el ideal está generado por un solo elemento $r(t)$. En resumen: $\mathbb{F}[t]$ es un **anillo entero principal**.

El anillo finito $\mathbb{Z}/n = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{n-1}\}$ de los residuos de enteros bajo división por n contiene divisores de cero si n no es un número primo. En efecto, si $n = rs$ entonces $\bar{r}\bar{s} = \bar{0}$ en \mathbb{Z}/n . En cambio, si $p \in \mathbb{N}$ es un número *primo*, entonces \mathbb{Z}/p es un cuerpo finito.² \diamond

Ejemplo 1.2. Si R es un anillo cualquiera y si $n \in \mathbb{N}^*$, el anillo $M_n(R)$ es la totalidad de **matrices** $n \times n$ con entradas en R , con el producto matricial evidente:

$$[c_{ij}] = [a_{ij}][b_{ij}] \quad \text{si y solo si todo} \quad c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk}.$$

Si $(V, +)$ es un grupo abeliano, los *endomorfismos* de V [es decir, las aplicaciones aditivas $f: V \rightarrow V$] forman un anillo End V bajo suma y composición. En el caso $V = R \oplus R \oplus \cdots \oplus R$ con n sumandos, hay un isomorfismo obvio entre $M_n(R)$ y $\text{End } V$. \diamond

Ejemplo 1.3. Si G es un grupo finito y R es un anillo conmutativo, el **anillo grupal** RG es la totalidad de sumas formales $\alpha = \sum_{x \in G} \alpha_x x$ con $x \in G, \alpha_x \in R$, con la operación de suma evidente: si $\beta = \sum_{x \in G} \beta_x x$, entonces $\alpha + \beta = \sum_{x \in G} (\alpha_x + \beta_x) x$. La multiplicación en RG es:

$$\alpha\beta = \left(\sum_{x \in G} \alpha_x x \right) \left(\sum_{y \in G} \beta_y y \right) = \sum_{x \in G} \sum_{y \in G} \alpha_x \beta_y xy = \sum_{z \in G} \left(\sum_{xy=z} \alpha_x \beta_y \right) z. \quad (1.1)$$

La identidad del anillo RG es el elemento neutro $1 \in G$. \diamond

► La definición que sigue es una generalización directa del concepto de un \mathbb{F} -espacio vectorial.

Definición 1.4. Sea R un anillo. Un grupo abeliano A es un **R -módulo izquierdo** si existe una aplicación $\mu: R \times A \rightarrow A : (r, a) \mapsto ra$, que cumple las propiedades:

$$r(a+b) = ra + rb, \quad (r+s)a = ra + sa, \quad r(sa) = (rs)a, \quad 1a = a, \quad (1.2)$$

²Cada cuerpo \mathbb{F} contiene 0 y 1. Si hay un primo p con $1 + 1 + \cdots + 1 = 0$ (con p sumandos), entonces el subcuerpo generado por 1 es isomorfo a \mathbb{Z}/p ; pero si no, el subcuerpo generado por 1 es isomorfo a \mathbb{Q} . Dícese que \mathbb{F} tiene *característica* p , respectivamente *característica* 0, en estos dos casos.

para todo $r, s \in R$ y $a, b \in A$. La aplicación μ se llama una **acción** de R sobre A .

De modo similar, un grupo abeliano C es un **R -módulo derecho** si existe una aplicación $\nu: C \times R \rightarrow C: (c, r) \mapsto cr$, que satisface

$$(c + d)r = cr + dr, \quad c(r + s) = cr + cs, \quad (cs)r = c(sr), \quad c1 = c,$$

para todo $r, s \in R$ y $c, d \in C$. ◇

Al escribir $\tilde{\mu}(r): a \mapsto ra$ y $\tilde{\nu}(r): c \mapsto cr$, estas propiedades dicen que $\tilde{\mu}: R \rightarrow \text{End } A$ es un homomorfismo de anillos. A su vez, $\tilde{\nu}: R^\circ \rightarrow \text{End } C$ es otro homomorfismo de anillos, donde R° denota el **anillo opuesto** de R . En detalle, los grupos abelianos $(R, +)$ y $(R^\circ, +)$ coinciden, pero se revierte el producto: al escribir $R^\circ := \{r^\circ : r \in R\}$, vale $r^\circ s^\circ := (sr)^\circ$. La aplicación $R \rightarrow R^\circ: r \mapsto r^\circ$ es un isomorfismo de anillos si y solo si R es conmutativo.

Fíjese que cualquier R -módulo derecho C puede ser considerado como un R° -módulo izquierdo, al definir $r^\circ c := cr$ para $r \in R, c \in C$. En todo lo que sigue, basta demostrar las proposiciones para uno de los dos tipos de módulos unilaterales.

Ahora bien, si R es conmutativo, un R -módulo unilateral es también bilateral, al definir $rc := cr$ o bien $ar := ra$ según el caso. En tales circunstancias, dicese que A y C son **R -módulos** simplemente.

Ejemplo 1.5. Si \mathbb{F} es un cuerpo, un \mathbb{F} -módulo V es simplemente un **espacio vectorial** sobre \mathbb{F} , en donde la operación $\mu: \mathbb{F} \times V \rightarrow V$ es la multiplicación escalar. (Por eso, la teoría de los R -módulos generaliza el álgebra lineal.) ◇

Ejemplo 1.6. Un \mathbb{Z} -módulo A es simplemente un **grupo abeliano** sin más estructura. De hecho, la propiedad $1a = a$ y la propiedad distributiva implican que

$$na = (1 + 1 + \cdots + 1)a = a + a + \cdots + a \quad (n \text{ veces}),$$

para $n \in \mathbb{N}$; además, $(-n)a = (-1)(na) = -na$. De este modo, la acción obvia de \mathbb{Z} sobre A es la única acción posible. ◇

Cualquier anillo R es un R -módulo izquierdo: en tal caso, las propiedades (1.2) no son otra cosa que la distributividad y la asociatividad de las operaciones binarias de R . El anillo R es también un R -módulo derecho, de la misma manera.

Cualquier *ideal izquierdo* $J \subset R$ es un R -módulo izquierdo, puesto que $r \in R, t \in J$ implican $rt \in J$. El grupo abeliano cociente R/J es otro R -módulo izquierdo, con la acción $r(s + J) := rs + J$.

Ejemplo 1.7. El grupo abeliano $\underline{R}^n := R \oplus R \oplus \cdots \oplus R$ (con n sumandos), considerado como la totalidad de “vectores columna” con n entradas en R , es un R -módulo izquierdo con la acción obvia: $r(c_1, \dots, c_n)^t := (rc_1, \dots, rc_n)^t$. Los elementos $e_j := (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^t \in \underline{R}^n$, donde la entrada 1 aparece en la posición $\#j$, tiene dos propiedades notables:

- (a) cada $x \in R^n$ es de la forma $x = r_1 e_1 + \cdots + r_n e_n$ para algunos $r_1, \dots, r_n \in R$;
 (b) y si $r_1 e_1 + \cdots + r_n e_n = 0$ en R^n , entonces $r_1 = \cdots = r_n = 0$ en R .

Es decir, el conjunto de elementos $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ genera el R -módulo R^n y a la vez son *independientes*. Por lo tanto, la expansión $x = r_1 e_1 + \cdots + r_n e_n$ de un elemento $x \in R^n$ es única. Dícese que $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ es una **base** de R^n . [Cualquier parte E de un R -módulo izquierdo A se llama *base* de A si posee las dos propiedades (a) y (b).]

Un R -módulo izquierdo es **libre** si posee una base. Se sabe que cualquier espacio \mathbb{F} -vectorial posee una base y que todas sus bases tienen la misma cardinalidad.

Para un anillo R cualquiera, la existencia de una base no está garantizada. Fíjese que R^n es un S -módulo izquierdo para el anillo $S = M_n(R)$, de manera evidente:

$$\begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & \cdots & r_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} r_{11}c_1 + \cdots + r_{1n}c_n \\ \vdots \\ r_{n1}c_1 + \cdots + r_{nn}c_n \end{pmatrix}.$$

Ahora la columna $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^t$, por sí sola, genera R^n como S -módulo izquierdo. Pero si $[s_{ij}] \in S$ con cada $s_{i1} = 0$, entonces $[s_{ij}]e_1 = 0$ en R^n : para $n \geq 2$ la condición (b) de independencia no se cumple, así que R^n no es libre como S -módulo izquierdo. \diamond

► En lo que sigue, conviene abreviar la frase “ R -módulo izquierdo” por “ R -módulo”, simplemente: se entenderá que las definiciones que siguen son aplicables para las dos clases de R -módulos unilaterales y también para R -módulos bilaterales (cuando R es conmutativo).

El concepto de **R -submódulo** $A \subseteq B$ es obvio: este es un subgrupo abeliano de $(B, +)$ estable bajo la acción de R , esto es: $a \in A \implies ra \in A$ para $r \in R$. También se define un **R -módulo cociente** B/A por la acción $r(b + A) := rb + A$. Como de costumbre, se escribe $[b] \equiv b + A$ para denotar una coclase en B/A .

Definición 1.8. Una aplicación $f: A \rightarrow B$ entre dos R -módulos es un *homomorfismo de módulos sobre R* , o más brevemente un **R -homomorfismo**, si

$$f(a + b) = f(a) + f(b) \quad \text{y} \quad f(ra) = r f(a), \quad \text{para todo} \quad a, b \in A, r \in R.$$

Si esta aplicación es inyectiva, sobreyectiva, o biyectiva, dícese que f es un **R -monomorfismo**; un **R -epimorfismo**; o un **R -isomorfismo**, respectivamente.

El **núcleo** y la **imagen** de f son los R -submódulos:

$$\ker f := \{a \in A : f(a) = 0\} \subseteq A, \quad \text{im } f := \{f(a) \in B : a \in A\} \subseteq B.$$

Al pasar al cociente, se definen el **conúcleo** y la **coimagen** de f por:

$$\text{coker } f := B/(\text{im } f); \quad \text{coim } f := A/(\ker f). \quad \diamond$$

Cuando A es un R -submódulo de B , la *inclusión* $j: A \rightarrow B$ es un R -monomorfismo; y la *aplicación cociente* $p: B \rightarrow B/A: b \mapsto b + A$ es un R -epimorfismo.

Escolio 1.9. Cualquier R -homomorfismo entre R -módulos $f: A \rightarrow B$ se factoriza como la composición de un epimorfismo, un isomorfismo y un monomorfismo (en ese orden):

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\quad f \quad} & B & & \\ & \searrow p & \nearrow j & & \\ & \text{coim } f & \xrightarrow{\hat{f}} & \text{im } f & \end{array} \quad \square$$

Definición 1.10. El conjunto de los R -homomorfismos de A en B se denota $\underline{\text{Hom}}_R(A, B)$; o a veces por $\text{Hom}(A, B)$ simplemente cuando la acción de R es obvio. Este es un grupo abeliano bajo la *suma puntual* de R -homomorfismos:

$$(\underline{f} + \underline{g})(a) := f(a) + g(a) \in B, \quad \text{para todo } f, g \in \text{Hom}_R(A, B), \quad a \in A.$$

Si $B = A$, un R -homomorfismo $f: A \rightarrow A$ es un R -**endomorfismo** de A . Tales endomorfismos forman un anillo bajo suma y composición, denotado $\underline{\text{End}}_R A \equiv \underline{\text{Hom}}_R(A, A)$. La identidad de este anillo se denota por 1_A . \diamond

Definición 1.11. La **suma directa** $A \oplus B$ de dos R -módulos A y B es el conjunto de pares ordenados $(a, b) \in A \times B$ con suma y R -acción obvias:

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) := (a_1 + a_2, b_1 + b_2), \quad r(a, b) := (ra, rb).$$

Esta suma directa viene acompañada de dos R -monomorfismos j_1, j_2 y dos R -epimorfismos p_1, p_2 con los siguientes dominios y codominios:

$$A \begin{array}{c} \xrightarrow{j_1} \\ \xleftarrow{p_1} \end{array} A \oplus B \begin{array}{c} \xleftarrow{j_2} \\ \xrightarrow{p_2} \end{array} B$$

los cuales cumplen las siguientes igualdades:

$$p_1 j_1 = 1_A, \quad p_1 j_2 = 0, \quad p_2 j_1 = 0, \quad p_2 j_2 = 1_B, \quad j_1 p_1 + j_2 p_2 = 1_{A \oplus B}. \quad (1.3)$$

[[A veces se llama *suma directa externa* a este R -módulo de pares ordenados, en contraste con el caso de un R -módulo C con submódulos A y B , acompañados con R -homomorfismos j'_1, j'_2, p'_1, p'_2 que satisfacen el análogo de (1.3) – una *suma directa interna*. En tal caso, se puede construir un isomorfismo $A \oplus B \simeq C$, así que la distinción carece de importancia.]]

Es evidente cómo definir una suma directa $A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_n$ de una cantidad finita de R -módulos. Cuando se dispone de una familia de R -módulos etiquetada por un conjunto índice infinito, se presentan dos opciones.

Definición 1.12. Sea dada $\{A_j : j \in J\}$ una familia de R -módulos. Su **producto directo** $\prod_{j \in J} A_j$ es el producto cartesiano de los A_j con suma y acción de R entrada por entrada:

$$(a_j) + (b_j) := (a_j + b_j), \quad r(a_j) := (ra_j).$$

Las proyecciones $p_k : \prod_{j \in J} A_j \rightarrow A_k$ definidas por $p_k((a_j)) := a_k$ son R -homomorfismos.

En cambio, su **suma directa** $\bigoplus_{j \in J} A_j$ es el R -submódulo de $\prod_{j \in J} A_j$ cuyos elementos son las familias (a_j) para las cuales $\{j \in J : a_j \neq 0\}$ es finito. Existen R -homomorfismos inyectivos $i_k : A_k \rightarrow \bigoplus_{j \in J} A_j$, donde $i_k(b_k)$ es la familia (a_j) tal que $a_k := b_k$ y $a_j := 0$ para $j \neq k$.

Si todos los A_j son copias de un solo R -módulo A , se escribe

$$\underline{A}^J := \prod_{j \in J} A, \quad \underline{A}^{(J)} := \bigoplus_{j \in J} A,$$

observando que $\underline{A}^{(J)} = \underline{A}^J$ si y solo si el conjunto índice J es finito. \diamond

► Otra forma de combinar dos módulos sobre un anillo conmutativo R es la de formar su *producto tensorial*. Para generalizar esta operación al caso donde el anillo no es conmutativo, es necesario considerar las acciones unilaterales de dos anillos.

Definición 1.13. Sean R y S dos anillos cualesquiera. Un **R - S -bimódulo** es un grupo abeliano A dotado de dos acciones $R \times A \rightarrow A : (r, a) \mapsto ra$ y $A \times S \rightarrow A : (a, s) \mapsto as$ tales que:

- ★ A es un R -módulo izquierdo (Definición 1.4);
- ★ A es un S -módulo derecho; y
- ★ las dos acciones son compatibles: $r(as) = (ra)s \in A$ para todo $r \in R, s \in S, a \in A$.

La tercera condición permite escribir $ras \in A$ sin ambigüedad. \diamond

Cualquier grupo abeliano es un \mathbb{Z} -módulo de manera única (Ejemplo 1.6). Entonces un R -módulo izquierdo es un R - \mathbb{Z} -bimódulo y un S -módulo derecho es una \mathbb{Z} - S -bimódulo. Entonces el concepto de bimódulo subsume todos los casos anteriores de módulos.

Definición 1.14. Sean dados tres anillos R, S, T ; un T - R -bimódulo A y un R - S -bimódulo B . Sea F el grupo abeliano *libre* generado por el conjunto $A \times B$ (producto cartesiano); y sea K el subgrupo de F generado por todos los elementos de estos tres tipos:

$$(a + a', b) - (a, b) - (a', b), \quad (a, b + b') - (a, b) - (a, b'), \quad (ar, b) - (a, rb),$$

para $a, a' \in A, b, b' \in B, r \in R$. El grupo abeliano cociente $\underline{A \otimes_R B} := F/K$ es el **producto tensorial** de A y B sobre R .

Conviene escribir $\underline{a \otimes b} := (a, b) + K$. Entonces $A \otimes_R B$ es el grupo abeliano generado por los elementos $\{a \otimes b : a \in A, b \in B\}$, sujeto solamente a las relaciones:

$$(a + a') \otimes b = a \otimes b + a' \otimes b, \quad a \otimes (b + b') = a \otimes b + a \otimes b', \quad ar \otimes b = a \otimes rb. \quad (1.4)$$

Un elemento $c \in A \otimes_R B$ es una suma finita de tensores simples: $c = \sum_{j=1}^m a_j \otimes b_j$.

Fíjese que $A \otimes_R B$ es un T - S -bimódulo, bajo las acciones obvias:

$$t(a \otimes b) := ta \otimes b, \quad (a \otimes b)s := a \otimes bs \quad \text{si } t \in T, s \in S. \quad \diamond$$

Si el anillo R es conmutativo, un R -módulo A es un R - R -bimódulo “simétrico” donde las dos acciones de R coinciden: $ra = ar$ para $r \in R, a \in A$. Si B es otro R -módulo, entonces la acción de R sobre $A \otimes_R B$ obedece:

$$r(a \otimes b) = ra \otimes b = a \otimes rb \quad \text{para todo } r \in R.$$

En particular, este es el caso de la multiplicación escalar sobre el producto tensorial $V \otimes_{\mathbb{F}} W$ de dos espacios \mathbb{F} -vectoriales. (En ese caso, se omite el adorno \mathbb{F} y se escribe $V \otimes W$, simplemente.)

Ejemplo 1.15. El producto tensorial $A \otimes B \equiv A \otimes_{\mathbb{Z}} B$ de dos grupos abelianos no triviales A y B puede ser trivial. Tómese, por ejemplo, $A = \mathbb{Z}/2$ y $B = \mathbb{Z}/3$. Sea $a \otimes b$ un tensor simple en $\mathbb{Z}/2 \otimes \mathbb{Z}/3$. Entonces

$$a \otimes b = 3(a \otimes b) - 2(a \otimes b) = a \otimes 3b - 2a \otimes b = a \otimes 0 - 0 \otimes b = 0,$$

así que $\mathbb{Z}/2 \otimes \mathbb{Z}/3 = 0$. Del mismo modo, se ve que $\mathbb{Z}/m \otimes \mathbb{Z}/n = 0$ cuando $m, n \in \mathbb{N}^*$ son relativamente primos.³ \diamond

Sea $f: A \rightarrow A'$ un homomorfismo de T - R -bimódulos (esto es, una aplicación aditiva tal que $f(tar) = t f(a) r$ para $a \in A, t \in T, r \in R$). A la vez, sea $g: B \rightarrow B'$ un homomorfismo de R - S -bimódulos. Entonces la fórmula

$$\underline{f \otimes g}(a \otimes b) := f(a) \otimes g(b)$$

define un homomorfismo de T - S -bimódulos $f \otimes g: A \otimes_R B \rightarrow A' \otimes_R B'$; desde luego, $f \otimes g$ se llama el “producto tensorial de f y g ”.

³Se escribe 0 en vez de $\{0\}$ para denotar un grupo abeliano trivial, o más generalmente un R -módulo nulo. Esa es una instancia de la costumbre, que aquí se adopta, de denotar cualquier “objeto nulo” por el símbolo 0 simplemente, y cualquier “elemento identidad” por el símbolo 1.

1.2 Sucesiones exactas

En esta sección, R será un anillo fijo, sobre el cual se tomará diversos R -módulos (izquierdo).

Definición 1.16. Dados tres R -módulos A, B, C y dos R -homomorfismos $f \in \text{Hom}_R(A, B)$ y $g \in \text{Hom}_R(B, C)$, la “sucesión” de tres R -módulos:

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

es **exacta en B** si y solo si $\text{im } f = \ker g$ (estos son dos R -submódulos de B). \diamond

Definición 1.17. Una sucesión de R -módulos de la forma⁴

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0 \quad (1.5)$$

es una **sucesión exacta corta** si es exacta en A , en B y en C . Dicho de otro modo, f es inyectivo ($\ker f = 0$); g es sobreyectivo ($\text{im } g = C$); $\text{im } f = \ker g$. \diamond

Ejemplo 1.18. Considérese, por ejemplo, la suma directa de dos R -módulos A y B (Definición 1.11). Esto da lugar a dos sucesiones cortas:

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow A \xrightarrow{j_1} A \oplus B \xrightarrow{p_2} B \longrightarrow 0 \\ 0 &\longleftarrow A \xleftarrow{p_1} A \oplus B \xleftarrow{j_2} B \longleftarrow 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

Las relaciones $p_1 j_2 = 0$ y $p_2 j_1 = 0$ de (1.3) dicen que estas sucesiones con complejos de R -módulos. Las relaciones $p_1 j_1 = 1_A$ y $p_2 j_2 = 1_B$ implican que j_1, j_2 son inyectivas y que p_1, p_2 son sobreyectivas. La última relación $j_1 p_1 + j_2 p_2 = 1_{A \oplus B}$ muestra que $\text{im } j_1 = A \oplus 0 = \ker p_2$ y $\text{im } j_2 = 0 \oplus B = \ker p_1$. Por lo tanto, estas dos sucesiones cortas son exactas. \diamond

Lema 1.19 (Lema de cinco). *Considérese un diagrama conmutativo de R -módulos y R -homomorfismos cuyas dos filas son sucesiones exactas:*

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1 & \xrightarrow{f_1} & A_2 & \xrightarrow{f_2} & A_3 & \xrightarrow{f_3} & A_4 & \xrightarrow{f_4} & A_5 \\ u_1 \downarrow & & u_2 \downarrow & & u_3 \downarrow & & u_4 \downarrow & & u_5 \downarrow \\ B_1 & \xrightarrow{g_1} & B_2 & \xrightarrow{g_2} & B_3 & \xrightarrow{g_3} & B_4 & \xrightarrow{g_4} & B_5 \end{array}$$

- (a) Si u_2, u_4 son epimorfismos y u_5 es un monomorfismo, entonces u_3 es un epimorfismo.
- (b) Si u_2, u_4 son monomorfismos y u_1 es un epimorfismo, entonces u_3 es un monomorfismo.

⁴Los R -homomorfismos $0 \rightarrow A$ y $C \rightarrow 0$ no se nombran, porque son únicos: un R -homomorfismo con dominio o codominio 0 es necesariamente trivial.

(c) Si u_2, u_4 son isomorfismos, si u_1 es un epimorfismo y u_5 es un monomorfismo, entonces u_3 es un isomorfismo.

Demostración. El inciso (c) sigue inmediatamente de las partes (a) y (b).

Ad (a): Tómesese $b_3 \in B_3$, así que $g_3(b_3) \in B_4$. Luego $g_3(b_3) = u_4(a_4)$ para algún $a_4 \in A_4$. Ahora $u_5 \circ f_4(a_4) = g_4 \circ u_4(a_4) = g_4 \circ g_3(b_3) = 0$, así que $f_4(a_4) = 0$ porque u_5 es inyectivo. Entonces $a_4 = f_3(a_3)$ para algún $a_3 \in A_3$. Esto dice que $g_3(b_3) = u_4 \circ f_3(a_3) = g_3 \circ u_3(a_3)$ y por lo tanto $g_3(b_3 - u_3(a_3)) = 0$. Luego hay $b_2 \in B_2$ con $g_2(b_2) = b_3 - u_3(a_3)$. Como u_2 es sobreyectivo, hay $a_2 \in A_2$ con $u_2(a_2) = b_2$. En seguida,

$$b_3 - u_3(a_3) = g_2(b_2) = g_2 \circ u_2(a_2) = u_3 \circ f_2(a_2),$$

y por ende $b_3 = u_3(a_3 + f_2(a_2))$. Esto muestra que u_3 es sobreyectivo.

Ad (b): Tómesese $a_3 \in A_3$ tal que $u_3(a_3) = 0$. Entonces $u_4 \circ f_3(a_3) = g_3 \circ u_3(a_3) = 0$, lo cual implica que $f_3(a_3) = 0$ y por ende $a_3 = f_2(a_2)$ para algún $a_2 \in A_2$. Pero entonces $g_2 \circ u_2(a_2) = u_3 \circ f_2(a_2) = u_3(a_3) = 0$ y se concluye que $u_2(a_2) = g_1(b_1)$ para algún $b_1 \in B_1$. A su vez, $b_1 = u_1(a_1)$ para algún $a_1 \in A_1$ porque u_1 es sobreyectivo. Esto implica que

$$u_2(a_2) = g_1(b_1) = g_1 \circ u_1(a_1) = u_2 \circ f_1(a_1).$$

Luego $a_2 = f_1(a_1)$ por ser u_2 inyectivo. Se deduce que $a_3 = f_2 \circ f_1(a_1) = 0$. Se ha comprobado que u_3 es inyectivo. \square

La técnica de la demostración anterior es el de *seguir el diagrama* (“diagram chasing”): el argumento es largo, pero cada paso individual es obvio; se trata de aprovechar todas las facetas del diagrama para llegar a la conclusión.

Corolario 1.20 (Lema de cinco corto). *Considérese un diagrama conmutativo de R -módulos y R -homomorfismos cuyas dos filas son sucesiones exactas cortas:*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A_1 & \xrightarrow{f_1} & A_2 & \xrightarrow{f_2} & A_3 & \longrightarrow & 0 \\ & & u_1 \downarrow & & u_2 \downarrow & & u_3 \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & B_1 & \xrightarrow{g_1} & B_2 & \xrightarrow{g_2} & B_3 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Si u_1 y u_3 son (a) epimorfismos, (b) monomorfismos, o (c) isomorfismos, entonces u_2 también es (a) un epimorfismo, (b) un monomorfismo, o (c) un isomorfismo, respectivamente. \square

Fíjese que la sucesión $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \longrightarrow 0$ es exacta si y solo si f es un R -isomorfismo. Esta simple observación resultará muy útil.

Lema 1.21. *Dado un diagrama conmutativo de R -módulos,*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ u \downarrow & & \downarrow v \\ D & \xrightarrow{h} & E \end{array}$$

existen R -homomorfismos $\tilde{u}: \ker f \rightarrow \ker h$, $\bar{v}: \operatorname{coker} f \rightarrow \operatorname{coker} h$ tal que el siguiente diagrama ampliado, cuyas filas son exactas, también conmuta:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \ker f & \xrightarrow{i} & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{p} & \operatorname{coker} f & \longrightarrow & 0 \\ & & \tilde{u} \downarrow & & u \downarrow & & v \downarrow & & \bar{v} \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \ker h & \xrightarrow{j} & D & \xrightarrow{h} & E & \xrightarrow{q} & \operatorname{coker} h & \longrightarrow & 0. \end{array} \quad (1.7)$$

Demostración. En el diagrama (1.7), se exhiben las inclusiones $i: \ker f \rightarrow A$ y $j: \ker h \rightarrow D$, y también las aplicaciones cocientes $p: B \rightarrow \operatorname{coker} f$ y $q: E \rightarrow \operatorname{coker} h$. Está claro que las dos filas son exactas.

Si $a \in A$ cumple $f(a) = 0$, entonces $h \circ u(a) = v \circ f(a) = v(0) = 0$. Esto dice que $u(\ker f) \subseteq \ker h$. Sea $\tilde{u}: \ker f \rightarrow \ker h$ la restricción de u al R -submódulo $\ker f$ de A . Es evidente que $j \circ \tilde{u} = u \circ i$.

Si $[b] \equiv p(b) = b + f(A)$ es una coclase en $\operatorname{coker} f$, con $b \in B$, entonces $[v(b)] \equiv q(v(b)) = v(b) + h(D)$ es una coclase en $\operatorname{coker} h$. Si $b' \in B$ cumple $[b'] = [b]$, entonces $b' - b = f(a)$ para algún $a \in A$, y por ende

$$v(b') - v(b) = v(b' - b) = v \circ f(a) = h \circ u(a) \in h(D),$$

así que $\bar{v}: [b] \mapsto [v(b)]$ define bien un R -homomorfismo $\bar{v}: \operatorname{coker} f \rightarrow \operatorname{coker} h$. Es evidente de esta definición que $\bar{v} \circ p = q \circ v$. \square

La proposición siguiente introduce una noción básica del álgebra homológica: un *homomorfismo conector* que une dos sucesiones cortas para formar una sucesión más larga.

Proposición 1.22 (Lema de la culebra). *Un diagrama conmutativo de R -módulos, con filas exactas:*

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \longrightarrow & 0 \\ u \downarrow & & v \downarrow & & w \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & D & \xrightarrow{h} & E & \xrightarrow{k} & F \end{array}$$

da lugar a una sucesión exacta de seis términos:

$$\ker u \xrightarrow{\tilde{f}} \ker v \xrightarrow{\tilde{g}} \ker w \xrightarrow{\partial} \operatorname{coker} u \xrightarrow{\bar{h}} \operatorname{coker} v \xrightarrow{\bar{k}} \operatorname{coker} w \quad (1.8)$$

donde el **homomorfismo conector** $\partial: \ker w \rightarrow \operatorname{coker} u$ sigue la “culebra” de abajo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \ker u & \xrightarrow{\tilde{f}} & \ker v & \xrightarrow{\tilde{g}} & \ker w & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{\quad} & 0 \\
 u \downarrow & & v \downarrow & & w \downarrow & & \\
 0 \rightarrow & D & \xrightarrow{h} & E & \xrightarrow{k} & F & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & \operatorname{coker} u & \xrightarrow{\bar{h}} & \operatorname{coker} v & \xrightarrow{\bar{k}} & \operatorname{coker} w &
 \end{array}$$

Demostración. El Lema 1.21 define los R -homomorfismos $\tilde{f}, \tilde{g}, \bar{h}, \bar{k}$.

Se define $\partial: \ker w \rightarrow \operatorname{coker} u$ por un seguimiento del diagrama en la dirección señalada por la culebra. Tómese $c \in \ker w \subseteq C$; entonces $c = g(b)$ para algún $b \in B$ por ser g sobreyectivo. Ahora $0 = w(c) = w \circ g(b) = k \circ v(b)$; esto dice que $v(b) \in \ker k = \operatorname{im} h$, de modo que hay $d \in D$ tal que $v(b) = h(d)$. Ya se puede definir $\partial(c) := [d] \equiv d + u(A) \in \operatorname{coker} u$.

Para ver que el R -homomorfismo ∂ está bien definido, tómese otro $b' \in B$ con $g(b') = c$. Entonces $g(b' - b) = 0$, así que $b' - b \in \ker g = \operatorname{im} f$, o sea, $b' = b + f(a)$ para algún $a \in A$. Entonces $v(b') = v(b) + v \circ f(a) = v(b) + h \circ u(a)$. Si $d' \in D$ cumple $v(b') = h(d')$, entonces $h(d') = h(d) + h \circ u(a)$. Como h es inyectivo por hipótesis, se ve que $d' = d + u(a)$. Pero entonces $[d'] = [d]$ en $\operatorname{coker} u = D/u(A)$. Por lo tanto, la coclase $[d]$ depende solo de c y no de b ni de a , como era de esperar.

Falta comprobar que la sucesión (1.8) es exacta.

- ★ Exactitud en $\ker v$: se ve que $\operatorname{im} \tilde{f} \subseteq \ker \tilde{g}$ porque $\tilde{g} \circ \tilde{f}(a) = g \circ f(a) = 0$ para $a \in \ker u$. Ahora, si $b \in \ker v$ cumple $\tilde{g}(b) = g(b) = 0$, entonces $b = f(a)$ con $a \in A$. Luego $h \circ u(a) = u \circ f(a) = u(b) = 0$; como h es inyectivo, sigue $u(a) = 0$, así que $a \in \ker u$, con $\tilde{f}(a) = f(a) = b$. Se ha comprobado que $\ker \tilde{g} \subseteq \operatorname{im} \tilde{f}$.
- ★ Exactitud en $\operatorname{coker} v$: es $\operatorname{im} \bar{h} \subseteq \ker \bar{k}$ porque $\bar{k} \circ \bar{h}([d]) = [k \circ h(d)] = 0$ para todo $[d] \in \operatorname{coker} u$. Ahora, si $[e] \in \operatorname{coker} v$ cumple $\bar{k}([e]) = [k(e)] = 0$, entonces $k(e) \in w(C)$, es decir, $k(e) = w(c)$ para algún $c \in C$; como g es sobreyectivo, hay $b \in B$ con $c = g(b)$, así que $k(e) = w \circ g(b) = k \circ v(b)$ y se obtiene $e - v(b) \in \ker k = \operatorname{im} h$ y luego $e = v(b) + h(d)$ para algún $d \in D$; esto dice que $[e] = [h(d)] = \bar{h}([d])$. Se ha comprobado que $\ker \bar{k} \subseteq \operatorname{im} \bar{h}$.
- ★ Exactitud en $\ker w$: se ve que $\operatorname{im} \tilde{g} \subseteq \ker \partial$ porque $b \in \ker v$ implica $\partial \circ \tilde{g}(b) = \partial \circ g(b) = [d]$ donde $d \in D$ cumple $h(d) = v(b) = 0$; como h es inyectivo, esto implica $d = 0$ en D y $[d] = 0$ en $\operatorname{coker} u$. Ahora, si $c \in \ker w$ cumple $\partial(c) = 0$, entonces existen $b \in B$ y

$d = u(a) \in u(A)$ tales que $c = g(b)$, $v(b) = h(d)$; luego, $v(b) = h(d) = h \circ u(a) = v \circ f(a)$. Esto dice que $b - f(a) \in \ker v$, por lo tanto $\tilde{g}(b - f(a)) = g(b) - g \circ f(a) = c - 0 = c$. Se ha comprobado que $\ker \partial \subseteq \text{im } \tilde{g}$.

- ★ Exactitud en coker u : se ve que $\text{im } \partial \subseteq \ker \bar{h}$ porque, dados $c \in \ker w$ y $b \in B$ con $g(b) = c$, hay $d \in D$ tal que $v(b) = h(d)$; de modo que $\bar{h} \circ \partial(c) = \bar{h}([d]) = [h(d)] = [v(b)] = 0$ en $\text{coker } v$. Ahora, si $[d] \in \text{coker } u$ cumple $\bar{h}([d]) = [h(d)] = 0$, entonces $h(d) \in v(B)$, o sea, $h(d) = v(b)$ con $b \in B$. Sea $c := g(b)$ y fíjese que $w(c) = w \circ g(b) = k \circ v(b) = k \circ h(d) = 0$, así que $c \in \ker w$. Entonces $\partial(c) = [d]$ por la definición de ∂ . Se ha comprobado que $\ker \bar{h} \subseteq \text{im } \partial$. \square

Una descripción informal del homomorfismo conector es la siguiente: tómese $c \in C$ con $w(c) = 0$ y sigue la dirección de la culebra para hallar $d := h^{-1} \circ v \circ g^{-1}(c) \in D$; entonces la fórmula $\partial(c) := [d]$ resulta ser bien definida y correcta.

En la demostración anterior, se puede percibir que una prueba de exactitud de $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ tiene un paso fácil, el de demostrar que $g \circ f = 0$; seguido por otro paso menos fácil, la comprobación de que $\ker g \subseteq \text{im } f$.

1.3 Complejos y homología

Definición 1.23. Una sucesión de R -módulos con R -homomorfismos $d_n: C_n \rightarrow C_{n-1}$,

$$C_{\bullet}: \quad \cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots \quad (1.9)$$

es un **complejo** de R -módulos si $d_n \circ d_{n+1} = 0$ para todo n .

Si $C_n = 0$ para todo $n < 0$, el complejo (1.9) es acotado a la derecha:

$$\cdots \longrightarrow C_2 \xrightarrow{d_2} C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \longrightarrow 0.$$

Por razones históricas, este tipo de complejo se llama un **complejo de cadenas**.⁵

En cambio, si $C_n = 0$ para todo $n > 0$, conviene introducir la notación $C^n := C_{-n}$ y también $d^n := d_{-n}: C^n \rightarrow C^{n+1}$, para así obtener un complejo acotado a la izquierda, llamado **complejo de cocadenas**:

$$0 \longrightarrow C^0 \xrightarrow{d^1} C^1 \xrightarrow{d^2} C^2 \longrightarrow \cdots$$

Un **complejo finito** es un complejo acotado por ambos lados. Por ejemplo, una sucesión exacta corta es, en particular, un complejo finito de tres R -módulos. \diamond

⁵En la topología algebraica, se considera una hipersuperficie que admite una triangulación, compuesto por símlices de cierta dimensión. La descripción combinatoria de la hipersuperficie es una suma formal de símlices orientados, llamada *cadena*. Las cadenas de dimensión n forman un grupo abeliano C_n . (Véase la sección 4.1 más adelante.)

Dado el complejo (1.9), considérese la suma directa $C_\bullet := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} C_n$ (algunos de los sumandos pueden ser ceros). Defínase el R -endomorfismo $d \in \text{End } C_\bullet$ al tomar $d = d_n$ sobre cada sumando C_n . Entonces las condiciones $d_n \circ d_{n+1} = 0$ se traducen en $d \circ d = 0$, esto es, $d^2 = 0$. Esto dice que el par (C_\bullet, d) es un “ R -módulo diferencial”, definido a continuación.

Definición 1.24. Un **R -módulo diferencial** (C, d) consta de un R -módulo C y un R -endomorfismo $d: C \rightarrow C$ tal que $d^2 = 0$. (El endomorfismo d es la **diferencial**.)

Escríbase $Z(C) := \ker d$ y $B(C) := \text{im } d$. La condición $d^2 = 0$ implica que $B(C)$ es un R -submódulo de $Z(C)$. El R -módulo cociente,

$$\underline{H(C)} := \frac{Z(C)}{B(C)},$$

es la **homología** de (C, d) .

Si C es un **R -módulo graduado**: $C = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} C_n$, y si la diferencial d es un R -homomorfismo de grado -1 , esto es, si $d(C_n) \subseteq C_{n-1}$ para cada n , entonces al poner $d_n := d|_{C_n}$ se recupera el complejo (1.9). En este caso, $H(C)$ es también un R -módulo graduado:

$$H(C) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H_n(C), \quad \text{con} \quad \underline{H_n(C)} := \frac{Z_n(C)}{B_n(C)} \equiv \frac{\ker d_n}{\text{im } d_{n+1}}. \quad (1.10)$$

Cada R -módulo $H_n(C)$ mide la falta de exactitud del complejo (1.9) en la entrada C_n . Este $H_n(C)$ suele llamarse el enésimo **grupo de homología** del complejo.⁶ \diamond

Escolio 1.25. A veces es útil designar⁷

$$\underline{Z'(C)} := \text{coker } d = \frac{C}{B(C)} \quad \text{y} \quad \underline{B'(C)} := \text{coim } d = \frac{C}{Z(C)}.$$

Hay un isomorfismo $\hat{d}: B'(C) \rightarrow B(C)$, dado por el Escolio 1.9. \square

Los elementos de C_n se llaman **n -cadenas**; los elementos de $Z_n(C)$ son **n -ciclos**; y los elementos de $B_n(C)$ son **n -bordes**. Dos n -ciclos $a_n, b_n \in Z_n(C)$ se llaman **homólogos** si difieren por un n -borde: $a_n - b_n = d_{n+1}(c_{n+1})$ para algún $c_{n+1} \in C_{n+1}$. Dicho de otro modo, a_n, b_n son homólogos si determinan la misma coclase $[a_n] = [b_n]$ en $H_n(C)$.

► Para complejos de cocadenas, las definiciones son las mismas pero la terminología es diferente. Al tomar $C^n := C_{-n}$ y $d^n := d_{-n}$, el resultado es otro R -módulo diferencial (C^\bullet, d) donde ahora la diferencial es de grado $+1$: $d(C^n) \subseteq C^{n+1}$ para cada n . Ahora los elementos de

⁶Cada $H_n(C)$ es un grupo abeliano, de ahí el nombre.

⁷Esta notación fue introducida en el libro de Cartan y Eilenberg, pero no ha tenido mucha aceptación.

C^n se llaman **n -cocadenas**; los elementos de $Z^n(C) := \ker d^n$ son **n -cociclos**; y los elementos de $B_n(C) := \operatorname{im} d^{n-1}$ son **n -cobordes**. El grupo abeliano (o R -módulo)

$$\underline{H^n(C)} := Z^n(C)/B^n(C) \equiv \ker d^n / \operatorname{im} d^{n-1}$$

es el enésimo **grupo de cohomología** del complejo. Dos cociclos en $Z^n(C)$ son **cohomólogos** si difieren por un n -coborde, determinando así la misma coclase en $H^n(C)$.

La razón principal para adoptar esta doble terminología es que muchas veces una familia de cadenas aparece ligada a otra familia de cocadenas con cierta relación de dualidad entre ellas. Esta dualidad conlleva fórmulas y teoremas importantes acerca de los respectivos grupos de homología y de cohomología, como se verá más adelante.

Definición 1.26. Dados dos R -módulos diferenciales (A, d) y (B, d') , es oportuno considerar las R -homomorfismos $u: A \rightarrow B$ que entrelazan las diferenciales, es decir, $u \circ d = d' \circ u: A \rightarrow B$. Si (A, d) y (B, d') son graduados, u debe ser de grado 0, o sea, $u(A_n) \subseteq B_n$ para todo n .

Dados dos complejos de tipo (1.9), un **morfismo de complejos** $u_\bullet: A_\bullet \rightarrow B_\bullet$ es una familia de R -homomorfismos $u_n: A_n \rightarrow B_n$ que hace conmutar el diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & A_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & A_n & \xrightarrow{d_n} & A_{n-1} & \xrightarrow{d_{n-1}} & A_{n-2} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow u_{n+1} & & \downarrow u_n & & \downarrow u_{n-1} & & \downarrow u_{n-2} & & \\ \cdots & \longrightarrow & B_{n+1} & \xrightarrow{d'_{n+1}} & B_n & \xrightarrow{d'_n} & B_{n-1} & \xrightarrow{d'_{n-1}} & B_{n-2} & \longrightarrow & \cdots \end{array} \quad (1.11)$$

lo cual dice que $u_{n-1} \circ d_n = d'_n \circ u_n$ para todo n .

El morfismo idéntico $1_{A_\bullet}: A_\bullet \rightarrow A_\bullet$ es el caso $(1_{A_\bullet})_n := 1_{A_n}: A_n \rightarrow A_n$ para todo n . \diamond

Lema 1.27. Un morfismo de complejos $u_\bullet: (A_\bullet, d) \rightarrow (B_\bullet, d')$ determina una familia de R -homomorfismos $u_*: H_n(A) \rightarrow H_n(B)$, uno para cada n . Si $v_\bullet: (B_\bullet, d') \rightarrow (C_\bullet, d'')$ es otro morfismo de complejos, entonces se cumple

$$(v \circ u)_* = v_* \circ u_*: H_n(A) \rightarrow H_n(C) \quad \text{para cada } n.$$

Demostración. Para definir $u_*: H_n(A) \rightarrow H_n(B)$, basta aplicar el Lema 1.21 al cuadrado conmutativo central del diagrama (1.11). De las definiciones, se ve que $\ker d_n = Z_n(A)$, $\ker d'_n = Z_n(B)$, $\operatorname{coker} d_n = A_{n-1}/B_{n-1}(A) = Z'_{n-1}(A)$, $\operatorname{coker} d'_n = B_{n-1}/B_{n-1}(B) = Z'_{n-1}(B)$. Entonces (1.7) se traduce en

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & Z_n(A) & \xrightarrow{j_n} & A_n & \xrightarrow{d_n} & A_{n-1} & \xrightarrow{p_n} & Z'_{n-1}(A) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \tilde{u}_n & & \downarrow u_n & & \downarrow u_{n-1} & & \downarrow \tilde{u}_{n-1} & & \\ 0 & \longrightarrow & Z_n(B) & \xrightarrow{j'_n} & B_n & \xrightarrow{d'_n} & B_{n-1} & \xrightarrow{p'_n} & Z'_{n-1}(B) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

con inclusiones j_n, j'_n y homomorfismos cocientes p_n, p'_n .

En particular, $u_n(Z_n(A)) \subseteq Z_n(B)$ porque $\tilde{u}_n: Z_n(A) \rightarrow Z_n(B)$ es la restricción de u_n al dominio $Z_n(A)$. Además, $u_n(B_n(A)) \subseteq B_n(B)$ por la conmutatividad del diagrama (1.11). Entonces, por ser $H_n(A) = Z_n(A)/B_n(A)$, el R -homomorfismo siguiente está bien definido:

$$u_*: H_n(A) \rightarrow H_n(B) : a_n + B_n(A) \mapsto u_n(a_n) + B_n(B),$$

tomando $a_n \in Z_n(A)$. [Dicho de otro modo, $u_*([a_n]) = [u_n(a_n)]$.] Esta fórmula muestra que $v_* \circ u_*(a_n + B_n(A)) = v_n \circ u_n(a_n) + B_n(C) = (v \circ u)_*(a_n + B_n(A))$ para cada $a_n \in Z_n(A)$. \square

Definición 1.28. Una sucesión de complejos de cadenas de R -módulos:

$$0 \longrightarrow A_\bullet \xrightarrow{u_\bullet} B_\bullet \xrightarrow{v_\bullet} C_\bullet \longrightarrow 0 \quad (1.12)$$

es una **sucesión exacta corta de complejos** si para cada n , la sucesión corta de R -módulos $0 \longrightarrow A_n \xrightarrow{u_n} B_n \xrightarrow{v_n} C_n \longrightarrow 0$ es exacta. \diamond

Teorema 1.29. Para cada sucesión exacta corta (1.12) de complejos de cadenas, existe una **sucesión exacta larga** de R -módulos, dada por:

$$\cdots \longrightarrow H_n(A) \xrightarrow{u_*} H_n(B) \xrightarrow{v_*} H_n(C) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \xrightarrow{u_*} H_{n-1}(B) \xrightarrow{v_*} H_{n-1}(C) \longrightarrow \cdots \quad (1.13)$$

donde cada $\partial = \partial_n: H_n(C) \rightarrow H_{n-1}(A)$ es un **homomorfismo conector**.

Demostración. El siguiente diagrama tiene dos filas exactas, por hipótesis:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A_n & \xrightarrow{u_n} & B_n & \xrightarrow{v_n} & C_n \longrightarrow 0 \\ & & d_n \downarrow & & d'_n \downarrow & & d''_n \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & A_{n-1} & \xrightarrow{u_{n-1}} & B_{n-1} & \xrightarrow{v_{n-1}} & C_{n-1} \longrightarrow 0. \end{array}$$

El lema de la culebra (Proposición 1.22) extrae de este diagrama dos sucesiones exactas:

$$0 \rightarrow Z_n(A) \xrightarrow{\tilde{u}_n} Z_n(B) \xrightarrow{\tilde{v}_n} Z_n(C) \text{ y } Z'_{n-1}(A) \xrightarrow{\tilde{u}_{n-1}} Z'_{n-1}(B) \xrightarrow{\tilde{v}_{n-1}} Z'_{n-1}(C) \rightarrow 0.$$

Fíjese que los R -homomorfismos $d_n: A_n \rightarrow A_{n-1}$ se anulan sobre $B_n(A)$ y su imagen es un submódulo de $Z_{n-1}(A)$; luego inducen R -homomorfismos $\hat{d}_n: Z'_n(A) \rightarrow Z_{n-1}(A)$. De ahí se obtiene un diagrama conmutativo con dos filas exactas:

$$\begin{array}{ccccccc} Z'_n(A) & \xrightarrow{\tilde{u}_n} & Z'_n(B) & \xrightarrow{\tilde{v}_n} & Z'_n(C) & \longrightarrow & 0 \\ & & \hat{d}_n \downarrow & & \hat{d}'_n \downarrow & & \hat{d}''_n \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & Z_{n-1}(A) & \xrightarrow{\tilde{u}_{n-1}} & Z_{n-1}(B) & \xrightarrow{\tilde{v}_{n-1}} & Z_{n-1}(C). \end{array}$$

Como $Z'_n(A) := A_n/B_n(A)$, el núcleo y conúcleo de \hat{d}_n son dos grupos de homología:

$$\ker \hat{d}_n = \frac{Z_n(A)}{B_n(A)} = H_n(A) \quad \text{y} \quad \text{coker } \hat{d}_n = \frac{Z_{n-1}(A)}{d(A_n)} = \frac{Z_{n-1}(A)}{B_{n-1}(A)} = H_{n-1}(A).$$

Otra aplicación del lema de la culebra al último diagrama entonces produce la sucesión exacta:

$$H_n(A) \xrightarrow{u_*} H_n(B) \xrightarrow{v_*} H_n(C) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \xrightarrow{u_*} H_{n-1}(B) \xrightarrow{v_*} H_{n-1}(C).$$

La sucesión exacta larga (1.13) es el resultado de fundir todos estas sucesiones parciales. \square

Este teorema tiene un gemelo en cohomología, cuya demostración es idéntica módulo los necesarios cambios de notación.

Escolio 1.30. Para cada sucesión exacta corta $0 \rightarrow A^\bullet \xrightarrow{u^\bullet} B^\bullet \xrightarrow{v^\bullet} C^\bullet \rightarrow 0$ de complejos de cocadenas, existe una **sucesión exacta larga** de R -módulos, dada por:

$$\cdots \rightarrow H^n(A) \xrightarrow{u^*} H^n(B) \xrightarrow{v^*} H^n(C) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(A) \xrightarrow{u^*} H^{n+1}(B) \xrightarrow{v^*} H^{n+1}(C) \rightarrow \cdots \quad (1.14)$$

donde cada $\delta = \delta^n: H^n(C) \rightarrow H^{n+1}(A)$ es un homomorfismo conector. \square

De ahora en adelante, se suprimirán los subíndices sobre los R -homomorfismos u_n , d_n , etcétera, cuando su dominio y codominio esté claro en contexto.

Lema 1.31. Dado un diagrama conmutativo de morfismos de complejos con filas exactas:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A_\bullet & \xrightarrow{u_\bullet} & B_\bullet & \xrightarrow{v_\bullet} & C_\bullet \longrightarrow 0 \\ & & f_\bullet \downarrow & & g_\bullet \downarrow & & h_\bullet \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & D_\bullet & \xrightarrow{w_\bullet} & E_\bullet & \xrightarrow{t_\bullet} & F_\bullet \longrightarrow 0 \end{array}$$

hay un diagrama conmutativo correspondiente de R -módulos:

$$\begin{array}{cccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_n(A) & \xrightarrow{u_*} & H_n(B) & \xrightarrow{v_*} & H_n(C) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(A) & \longrightarrow & \cdots \\ & & f_* \downarrow & & g_* \downarrow & & h_* \downarrow & & f_* \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & H_n(D) & \xrightarrow{w_*} & H_n(E) & \xrightarrow{t_*} & H_n(F) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(D) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Demostración. El Lema 1.27 muestra que los primeros dos cuadrados conmutan. Solo falta comprobar la conmutatividad del tercero, es decir, que $\partial \circ h_* = f_* \circ \partial: H_n(C) \rightarrow H_{n-1}(D)$.

Con la definición del homomorfismo conector, tómese $c_n \in Z_n(C)$, de modo que $h_*[c_n] = [h(c_n)] \in H_n(F)$, observando que $h(c_n) \in Z_n(F)$. Tómese $b_n \in B_n$ y $a_{n-1} \in Z_{n-1}(A)$ con

$v(b_n) = c_n$ y $u(a_{n-1}) = d(b_n)$. Entonces $\partial[c_n] = [a_{n-1}]$. Ahora $t(g(b_n)) = h(c_n)$ y además $d(g(b_n)) = g(d(b_n))$, así que

$$w(f(a_{n-1})) = g(u(a_{n-1})) = g(d(b_n)) = d(g(b_n)),$$

de donde se concluye que $\partial[h(c_n)] = [f(a_{n-1})]$ en $H_{n-1}(D)$. En otras palabras, $\partial(h_*[c_n]) = f_*[a_{n-1}] = f_*(\partial[c_n])$, para todo $[c_n] \in H_n(C)$. Este cálculo incluye varias elecciones de representantes de coclases, pero la demostración de la Proposición 1.22 muestra que el resultado no depende de ellas; luego, se verifica $\partial \circ h_* = f_* \circ \partial$ sobre $H_n(C)$. \square

Notación. Resulta útil correr o *trasladar* el complejo (1.9) al mover cada R -módulo una posición a la izquierda. Se define $C_n[1] := C_{n+1}$ y $d' := -d : C_n[1] \rightarrow C_{n-1}[1]$. (El cambio de signo en la diferencial resulta conveniente.) Al correr C_\bullet por k posiciones, se define

$$C_n[k] := C_{n+k} \quad \text{con diferencial} \quad d' := (-1)^k d : C_n[k] \rightarrow C_{n-1}[k]. \quad (1.15)$$

Para complejos de cocadenas, se escribe $C^n[k] := C^{n-k}$ con $d' := (-1)^k d$ también.

Fíjese que esta operación desplaza los grupos de homología o cohomología:

$$H_n(C[k]) = H_{n+k}(C), \quad H^n(C[k]) = H^{n-k}(C).$$

Dado un morfismo de complejos $u_\bullet : A_\bullet \rightarrow B_\bullet$ es posible fabricar una sucesión exacta larga en donde todos los R -homomorfismos $u_* : H_n(A) \rightarrow H_n(B)$ están encajados.

Definición 1.32. El **cono** de un morfismo⁸ de complejos $u_\bullet : (A_\bullet, d') \rightarrow (B_\bullet, d'')$ es el complejo $(C(u)_\bullet, d)$ dado por $C(u)_n := A_{n-1} \oplus B_n$, con $d(a_{n-1}, b_n) := (-d'a_{n-1}, d''b_n - u(a_{n-1}))$. Dicho de otro modo, $C(u)_\bullet := A_\bullet[-1] \oplus B_\bullet$ y la diferencial tiene un aspecto matricial:

$$d = \begin{pmatrix} -d' & 0 \\ -u & d'' \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} A_{n-1} \\ \oplus \\ B_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A_{n-2} \\ \oplus \\ B_{n-1} \end{pmatrix}$$

de donde la propiedad $d^2 = 0$ es obvia, puesto que $u \circ d' - d'' \circ u = 0$. \diamond

Lema 1.33. Cada morfismo de complejos $u_\bullet : A_\bullet \rightarrow B_\bullet$ da lugar a una sucesión exacta corta de complejos:

$$0 \longrightarrow B_\bullet \xrightarrow{j_\bullet} C(u)_\bullet \xrightarrow{p_\bullet} A_\bullet[-1] \longrightarrow 0,$$

cuya sucesión exacta larga en homología tiene la forma:

$$\cdots \longrightarrow H_{n+1}(C(u)) \xrightarrow{p_*} H_n(A) \xrightarrow{u_*} H_n(B) \xrightarrow{j_*} H_n(C(u)) \xrightarrow{p_*} H_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots$$

⁸El término *cono* (de un morfismo) viene del *cono de una aplicación* (mapping cone) en la homología singular de espacios topológicos, como se verá más adelante.

Demostración. Defínase un R -monomorfismo $j: B_n \rightarrow C(u)_n$ por $j(b_n) := (0, b_n)$ y un R -epimorfismo $p: C(u)_n \rightarrow A_{n-1}$ por $p(a_{n-1}, b_n) := -a_{n-1}$. Es evidente que la sucesión corta $0 \rightarrow B_n \xrightarrow{j} C(u)_n \xrightarrow{p} A_{n-1} \rightarrow 0$ es exacta.

Nótese que $H_{n+1}(A[-1]) = H_n(A)$ y $H_n(A[-1]) = H_{n-1}(A)$, de modo que la sucesión larga ilustrada es la que viene de (1.13), con la posible excepción del homomorfismo conector. Si $a_n \in Z_n(A)$, el cálculo de ∂ identifica $(-a_n, 0) \in C(u)_{n+1}$, luego $d(-a_n, 0) = (0, u(a_n))$ en $C(u)_n$, y después $u(a_n) \in Z_n(B)$, para concluir que $\partial[a_n] = [u(a_n)] = u_*[a_n]$ en $H_n(B)$. En consecuencia, $\partial = u_*: H_n(A) \rightarrow H_n(B)$ en este caso, como se quería. \square

Definición 1.34. Una **homotopía** (o *homotopía de cadenas*)⁹ entre dos morfismos de complejos $u_\bullet, v_\bullet: (A_\bullet, d) \rightarrow (B_\bullet, d')$ es una familia de R -homomorfismos $s_n: A_n \rightarrow B_{n+1}$ para todo n , tales que

$$d'_{n+1} \circ s_n + s_{n-1} \circ d_n = u_n - v_n \quad \text{para todo } n. \quad (1.16)$$

Dícese que u_\bullet y v_\bullet son **homotópicos** (escrito $u_\bullet \sim v_\bullet$) si existe una homotopía entre ellos.

Una *homotopía de cocadenas* entre $w^\bullet, t^\bullet: (A^\bullet, d) \rightarrow (B^\bullet, d')$ es una familia de R -homomorfismos $s^n: A^n \rightarrow B^{n-1}$ tales que $d'^{n-1} \circ s^n + s^{n+1} \circ d^n = w^n - t^n$ para todo n . \diamond

Lema 1.35. Si $u_\bullet, v_\bullet: A_\bullet \rightarrow B_\bullet$ son dos morfismos de complejos homotópicos, entonces $u_* = v_*: H_n(A) \rightarrow H_n(B)$ para todo n .

Demostración. Si $\{s_n\}$ es una homotopía que cumple (1.16) en $\text{Hom}_R(A_n, B_n)$ para todo n , tómese $a \in Z_n(A)$. Entonces:

$$u_n(a) - v_n(a) = d'_{n+1}(s_n(a)) + s_{n-1}(d_n(a)) = d'_{n+1}(s_n(a)) + 0 \in B_n(B),$$

así que $u_*[a] = [u_n(a)] = [v_n(a)] = v_*[a]$ en $H_n(B)$. Por lo tanto, $u_* = v_*$ sobre cada $H_n(A)$. \square

Definición 1.36. Dos complejos (A_\bullet, d) y (B_\bullet, d') son **homotópicamente equivalentes** si hay morfismos de complejos $u_\bullet: (A_\bullet, d) \rightarrow (B_\bullet, d')$ y $v_\bullet: (B_\bullet, d') \rightarrow (A_\bullet, d)$ tales que $v_\bullet \circ u_\bullet \sim 1_{A_\bullet}$ y $u_\bullet \circ v_\bullet \sim 1_{B_\bullet}$.

Está claro que esta es una relación de equivalencia entre complejos. Por el Lema 1.35, dos complejos homotópicamente equivalentes poseen grupos de homología isomorfos. \diamond

Los lemas 1.31, 1.33 y 1.35 y la Definición 1.36 de equivalencia homotópica poseen enunciados y demostraciones análogos para complejos de cocadenas y grupos de cohomología, cuya formulación se dejará al cuidado del lector.

⁹Esta noción es una versión algebraica de una homotopía entre espacios topológicos. Véase el Teorema 4.13 más adelante.

1.4 Ejercicios sobre R -módulos

En estos ejercicios, R es un anillo, no necesariamente conmutativo. Cada R -módulo es izquierdo, salvo indicación contraria.

Ejercicio 1.1. Demostrar el Escolio 1.9.

Ejercicio 1.2. Dadas dos R -módulos A y B , sea C un R -módulo para el cual existen dos R -monomorfismos $j'_1: A \rightarrow C$, $j'_2: B \rightarrow C$ y dos R -epimorfismos $p'_1: C \rightarrow A$, $p'_2: C \rightarrow B$ que cumplen las siguientes relaciones:

$$p'_1 j'_1 = 1_A, \quad p'_1 j'_2 = 0, \quad p'_2 j'_1 = 0, \quad p'_2 j'_2 = 1_B, \quad j'_1 p'_1 + j'_2 p'_2 = 1_C.$$

Construir un R -isomorfismo $C \simeq A \oplus B$.

Ejercicio 1.3. Sea A un R -módulo izquierdo, B un R -módulo derecho, G un grupo abeliano. Una función $f: A \times B \rightarrow G$ es R -bilineal si satisface las relaciones

$$f(a + a', b) = f(a, b) + f(a', b), \quad f(a, b + b') = f(a, b) + f(a, b'), \quad f(ar, b) = f(a, rb)$$

para $a, a' \in A$; $b, b' \in B$; $r \in R$. Demostrar que hay un único homomorfismo de grupos abelianos $\tilde{f}: A \otimes_R B \rightarrow G$ tal que $\tilde{f}(a \otimes b) = f(a, b)$ para todo $(a, b) \in A \times B$. Verificar que la correspondencia $f \mapsto \tilde{f}$ es aditiva.

Ejercicio 1.4. Sea A un R -módulo izquierdo y B un R -módulo derecho. Demostrar que la aplicación aditiva $\tau: a \otimes b \mapsto b \otimes a$ define un isomorfismo $\tau: A \otimes_R B \rightarrow B \otimes_{R^o} A$.

Ejercicio 1.5. Sean A y C dos R -módulo izquierdo y sean B y D dos R -módulos derechos. Demostrar que hay isomorfismos de grupos abelianos:

$$(A \oplus C) \otimes_R B \simeq (A \otimes_R B) \oplus (C \otimes_R B),$$

$$A \otimes_R (B \oplus D) \simeq (A \otimes_R B) \oplus (A \otimes_R D).$$

Ejercicio 1.6. Comprobar estas propiedades de sucesiones exactas de R -módulos.

- (a) La sucesión $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B$ es exacta si y solo si f es un R -monomorfismo.
- (b) La sucesión $B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ es exacta si y solo si g es un R -epimorfismo.
- (c) La sucesión $0 \longrightarrow A \xrightarrow{h} B \longrightarrow 0$ es exacta si y solo si h es un R -isomorfismo.
- (d) Si la sucesión $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \xrightarrow{w} D \xrightarrow{t} E$ es exacta y si u y t son R -isomorfismos, entonces $C = 0$.

Ejercicio 1.7. Dada un diagrama conmutativa de R -módulos con filas exactas (sin el homomorfismo w):

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \longrightarrow & 0 \\ u \downarrow & & v \downarrow & & w \downarrow & & \\ D & \xrightarrow{h} & E & \xrightarrow{k} & F & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

demostrar que existe un único R -homomorfismo $w: C \rightarrow F$ que hace conmutar el diagrama completo. Si además u y v son isomorfismos, comprobar que w es un isomorfismo.

Ejercicio 1.8. Dada un diagrama conmutativa de R -módulos con filas exactas (sin el homomorfismo u):

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\ & & u \downarrow & & v \downarrow & & w \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & D & \xrightarrow{h} & E & \xrightarrow{k} & F \end{array}$$

demostrar que existe un único R -homomorfismo $u: A \rightarrow D$ que hace conmutar el diagrama completo. Si además v y w son isomorfismos, comprobar que u es un isomorfismo.

Ejercicio 1.9. Demostrar el lema de cinco (Lema 1.19) a partir del lema de la culebra (Proposición 1.22).

Ejercicio 1.10. Si (C_\bullet, d) es un complejo de cadenas, con inclusiones $i_n: Z_n(C) \hookrightarrow C_n$, $j_n: H_n(C) \hookrightarrow Z'_n(C)$ y homomorfismos cocientes $p_n: Z_n(C) \twoheadrightarrow H_n(C)$, demostrar que las siguientes sucesiones de complejos son exactas:

$$(a) \quad 0 \longrightarrow Z_\bullet(C) \xrightarrow{i_\bullet} C_\bullet \xrightarrow{d_\bullet} B_\bullet(C)[-1] \longrightarrow 0,$$

$$(b) \quad 0 \longrightarrow H_\bullet(C) \xrightarrow{j_\bullet} Z'_\bullet(C) \xrightarrow{\hat{d}_\bullet} Z_\bullet(C)[-1] \xrightarrow{p_\bullet} H_\bullet(C)[-1] \longrightarrow 0.$$

En la sucesión exacta larga en la homología del caso (a), comprobar que cada $d_* = 0$ y los homomorfismos conectores son las inclusiones $B_n(C) \hookrightarrow Z_n(C)$.

Ejercicio 1.11. Si $0 \longrightarrow C_n \longrightarrow C_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_0 \longrightarrow 0$ es un complejo de espacios \mathbb{F} -vectoriales de dimensión finita, con $m_k := \dim C_k$ y $b_k := \dim H_k(C)$, demostrar que

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k b_k = \sum_{k=0}^n (-1)^k m_k.$$

Ejercicio 1.12. Demostrar que la homotopía de cadenas entre morfismos de (A_\bullet, d) en (B_\bullet, d') es una relación de equivalencia.

Ejercicio 1.13. Si $u_\bullet, v_\bullet: (A_\bullet, d) \rightarrow (B_\bullet, d')$ son aplicaciones de cadena homotópicas, $u_\bullet \sim v_\bullet$; y si $w_\bullet, t_\bullet: (B_\bullet, d') \rightarrow (C_\bullet, d'')$ son otras aplicaciones de cadena homotópicas, $w_\bullet \sim t_\bullet$, demostrar que sus composiciones también son homotópicas: $(w_\bullet \circ u_\bullet) \sim (t_\bullet \circ v_\bullet)$.

Ejercicio 1.14. Un complejo A_\bullet se llama **contractible** si su morfismo identidad es homotópico al morfismo nulo, $1_{A_\bullet} \sim 0$. Si B_\bullet es un complejo de R -módulos cualquiera, demostrar que el cono $C(1_B)_\bullet$ de la identidad $1_B: B_\bullet \rightarrow B_\bullet$ es contractible.

Ejercicio 1.15. Denótese por $(\times k): \mathbb{Z}/m \rightarrow \mathbb{Z}/m$, para $k \in \mathbb{Z}$, el homomorfismo de multiplicación $(a \bmod m) \mapsto (ka \bmod m)$. Considérese el complejo (no acotado) de grupos abelianos:

$$\cdots \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}/4 \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}/4 \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}/4 \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}/4 \xrightarrow{\times 2} \cdots$$

Comprobar que este complejo tiene homología trivial, pero que no es contractible: no existe una homotopía entre la identidad y el morfismo nulo.

2 Categorías y funtores

As you know, my honourable colleague Mac Lane supports the idea that every structural notion necessarily comes equipped with a notion of homomorphism. [...] What on earth does he hope to deduce from this kind of considerations?

— Carta de André Weil a Claude Chevalley, 1954

[Oscar Zariski] was much more open to new techniques than Weil, who radiated cynicism about anyone else's abstractions.

— David Mumford, 2014

En 1945, un trabajo seminal de Eilenberg y MacLane¹ propuso clasificar diversos estudios matemáticos mediante un concepto que ellos llamaron *categoría*. Una categoría reúne una colección de *objetos* junto con familias de *morfismos* entre dos objetos, sujeto a ciertas reglas de combinación. Por ejemplo, dado un anillo R , se puede considerar los R -módulos (izquierdos) como objetos, junto con sus R -homomorfismos. Entre dos categorías dadas operan los *funtores*, que actúan simultáneamente sobre objetos y morfismos de manera compatible. Además, entre dos funtores se manifiestan ciertas transformaciones “naturales”; el objetivo de artículo de Eilenberg y MacLane fue el de esclarecer la naturaleza de esa naturalidad.

En las décadas siguientes, la noción de categoría ha sido muy útil como un “lenguaje” para expresar relaciones entre diversos conceptos matemáticos de modo corto y eficiente. Hoy en día, en parte por influencias de informática y física cuántica, se estudian las categorías como estructuras algebraicas propias, aparte de sus posibles instancias concretas.

2.1 Categorías: definición y ejemplos

Definición 2.1. Una **categoría** C consta de tres datos:

1. Una clase de **objetos** $\text{Ob}(C)$.
2. Una clase de **morfismos** $\text{Mor}(C)$, que a su vez es una familia de conjuntos $C(A, B)$, uno para cada par de objetos A, B en $\text{Ob}(C)$.
3. Una **ley de composición** de morfismos, concretada en una familia de aplicaciones

$$C(A, B) \times C(B, C) \rightarrow C(A, C) : (f, g) \mapsto \underline{gf}$$

para cada tres objetos A, B, C en $\text{Ob}(C)$.

¹Se trata del artículo: Samuel Eilenberg y Saunders MacLane, “General theory of natural equivalences”, Transactions of the American Mathematical Society **58** (1945), 231–294. En este trabajo aparecen los términos *categoría* y *funtor* por primera vez.

Estos datos deben cumplir tres requisitos:

- (a) Los conjuntos de morfismos $C(A, B)$ son *disjuntos*: cada morfismo f determina unívocamente dos objetos A (su dominio) y B (su codominio) tales que $f \in C(A, B)$.
- (b) Para cada objeto A existe un único **morfismo identidad** $1_A \in C(A, A)$ tal que $f 1_A = f$ y $1_A g = g$ toda vez que $f \in C(A, B)$ y $g \in C(C, A)$.
- (c) La composición es *asociativa*: si $f \in C(A, B)$, $g \in C(B, C)$ y $h \in C(C, D)$, entonces $h(gf) = (hg)f$ en $C(A, D)$. \diamond

Estas notaciones merecen algunos comentarios. Se postula que $\text{Ob}(C)$ y $\text{Mor}(C)$ son *clases* para evitar algunas paradojas de la teoría de conjuntos. [La teoría de Gödel y Bernays formaliza este lenguaje; en esa teoría, los *conjuntos* son precisamente aquellas clases que pueden ser miembros de otras clases.] En adelante, se escribirá $A \in C$ para significar que “ A es un objeto en $\text{Ob}(C)$ ” aunque se debe advertir que el símbolo \in no siempre tendrá su interpretación usual de la pertinencia de un elemento a un conjunto.²

Los morfismos con dominio A y codominio B forman un conjunto, denotado $C(A, B)$. Otras notaciones usadas son $\text{Hom}_C(A, B)$, o simplemente $\text{Hom}(A, B)$ cuando no hay ambigüedad acerca de la categoría C . Se reserva el derecho de usar una notación alternativa de vez en cuando; en particular, se continuará usando $\text{Hom}_R(A, B)$ en la categoría de R -módulos.

Algunos autores no demandan que $C(A, B)$ sea un conjunto (podría ser una clase más amplia), en cuyo caso dicen que C es *localmente pequeño* cuando los morfismos entre dos objetos forman conjuntos – una terminología propuesta por MacLane (1961). En este curso todas las categorías discutidas son localmente pequeños. Más útil es el término siguiente: dícese que C es una **categoría pequeña** cuando $\text{Ob}(C)$ es un conjunto.

Fíjese que la composición gf está definida si y solo si el dominio de g coincide con el codominio de f . En otras palabras, esta es una “operación binaria parcial”. La igualdad $h(gf) = (hg)f$ tiene lugar toda vez que uno de los dos lados de la ecuación esté definido, pues entonces el otro lado también está definido; en cuyo caso, la composición se escribe como $hgf \in C(A, D)$, sin ambigüedad.

Ejemplo 2.2. La categoría cuyos objetos son los *conjuntos* y cuyos morfismos son las *funciones* entre conjuntos se denota por Set , por su nombre en inglés.³ Cada elemento de $\text{Set}(X, Y)$ es una función $f: X \rightarrow Y$. Más generalmente, se usará la notación “ $f: A \rightarrow B$ ” como abreviatura de “ $f \in C(A, B)$ ”, aun cuando los morfismos de una determinada categoría C no sean funciones entre conjuntos. \diamond

²Una variante sería la notación $A \in\!\!\in C$, recomendado por Ralf Meyer y empleado en el curso “Teoría de módulos” (<http://hdl.handle.net/10669/29504>); pero no será usado en este curso.

³Para tener una nomenclatura uniforme, conviene usar el idioma científica universal del siglo XXI para denotar las categorías.

Ejemplo 2.3. Muchas categorías familiares constan de objetos que son conjuntos con cierta estructura y morfismos que son funciones que conservan esa estructura (y cuyas composiciones también lo conservan). He aquí una lista de los más comunes.

- (a) \mathbf{Grp} es la categoría de grupos y homomorfismos de grupos.
- (b) \mathbf{Ab} es la categoría de grupos abelianos y homomorfismos entre grupos abelianos.
- (c) \mathbf{Ring} es la categoría de anillos y homomorfismos de anillos.
- (d) $R\text{-Mod}$, para un determinado anillo R , es la categoría de R -módulos izquierdos y sus R -homomorfismos.
- (e) $\mathbf{Mod}\text{-}R$ es la categoría de R -módulos derechos y sus R -homomorfismos.
- (f) \mathbf{Top} es la categoría de espacios topológicos y funciones continuas.
- (g) \mathbf{Diff} es la categoría de variedades diferenciales y funciones suaves.⁴
- (h) $\mathbf{Vect}\text{-}\mathbb{F}$, para un determinado cuerpo \mathbb{F} , es la categoría de espacios \mathbb{F} -vectoriales y aplicaciones \mathbb{F} -lineales. \diamond

Ejemplo 2.4. Sea J un conjunto dotado de un orden parcial – una relación reflexiva, transitiva y antisimétrica \leq definida sobre J . Hay una categoría pequeña, denotado \mathbf{J} , tal que $\mathbf{Ob}(\mathbf{J}) = J$, con un único morfismo en $\mathbf{J}(i, j)$ si $i \leq j$; pero con $\mathbf{J}(i, j) = \emptyset$ si $i \not\leq j$. Esta categoría es un **poset**, es decir, un conjunto parcialmente ordenado.⁵

Si $f_{ji}: i \rightarrow j$ denota el único morfismo en $\mathbf{J}(i, j)$ cuando $i \leq j$, fíjese que $1_k = f_{kk} \in \mathbf{J}(k, k)$ para cada $k \in J$ (por reflexividad del orden parcial); y que $f_{kj}f_{ji} = f_{ki}$ si $i \leq j \leq k$, por transitividad. La asociatividad de la composición es consecuencia de la unicidad del morfismo f_{li} , si $i \leq j \leq k \leq l$.

Si la relación de orden en J es *trivial*: $i \leq j$ si y solo si $i = j$, entonces \mathbf{J} es una **categoría discreta**, cuyos únicos morfismos son las identidades.

En la teoría de conjuntos, los *números cardinales* finitos se definen inductivamente por $0 := \emptyset$, $1 := \{0\}$, $2 := \{0, 1\}$, etc., y en general $n := \{0, 1, \dots, n-1\}$, de modo que el número cardinal n es un conjunto con n elementos. Cada número cardinal n , dotado con el orden total usual, $0 < 1 < 2 < \dots < n-1$, determina un poset \underline{n} con $\mathbf{Ob}(\underline{n}) = n$. \diamond

⁴La composición de dos funciones suaves (de clase C^∞) entre variedades diferenciales es otra función suave. Por la regla de la cadena, las funciones de clase C^k , para $k \in \mathbb{N}$, también son cerradas bajo composición: al usarlas como morfismos entre variedades diferenciales, se obtiene otras categorías \mathbf{Diff}^k .

⁵Un conjunto parcialmente ordenado se llama *poset* como abreviatura de “partially ordered set”.

Las categorías pequeñas con pocos objetos son representadas por grafos cuyos vértices son los objetos y cuyas aristas dirigidas (flechas) son los morfismos. Por convenio, los morfismos $1_x \in \mathcal{C}(x, x)$ no se dibujan (su presencia es obligatoria, por la condición (b) de la Definición 2.1). Algunos ejemplos son:

$$\begin{array}{ccccccc} \underline{1} : \bullet & \underline{2} : \bullet \rightarrow \bullet & \underline{3} : \bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \bullet & & & & \\ \bullet \rightrightarrows \bullet & \bullet \leftrightsquigarrow \bullet & \bullet \rightarrow \bullet \leftarrow \bullet & & \bullet \leftarrow \bullet \rightarrow \bullet & & \end{array}$$

Los primeros dos grafos de la segunda fila no son posets.

Ejemplo 2.5. En particular, sea X un espacio topológico con topología \mathcal{T} ,⁶ cuyos miembros son los *abiertos* (o partes abiertas) de X . Entonces la *inclusión* $U \subseteq V$ es una orden parcial sobre \mathcal{T} . Se denota este poset por $\text{Top-}X$. \diamond

Ejemplo 2.6. Una categoría pequeña \mathcal{C} con un solo objeto es un *monoide*: si $\text{Ob}(\mathcal{C}) = \{*\}$, entonces $M := \text{Mor}(\mathcal{C})$ tiene una ley de composición asociativa; 1_* es su identidad.

En una categoría \mathcal{C} cualquiera, un morfismo $f \in \mathcal{C}(A, B)$ es invertible si hay otro morfismo $g \in \mathcal{C}(B, A)$ tal que $g f = 1_A$ y $f g = 1_B$. Este inverso g es único, por el argumento usual: si $h f = 1_A$ y $f h = 1_B$, entonces $h = 1_A h = (g f) h = g(f h) = g 1_B = g$. Un morfismo invertible se llama un **isomorfismo**.

Si \mathcal{C} es una categoría con un sólo objeto en la cual todo morfismo es invertible, entonces $G := \text{Mor}(\mathcal{C}) = \mathcal{C}(*, *)$ es un **grupo**. La asociatividad del producto en G es simplemente la propiedad (c) de la definición de una categoría.

Para distinguir entre el grupo G (un conjunto con leyes de multiplicación e inversión) y la categoría asociada, conviene denotar ésta por BG . Así, $\text{Ob}(\text{BG}) = \{*\}$ y $\text{Mor}(\text{BG}) = G$. \diamond

Ejemplo 2.7. Una categoría pequeña \mathcal{C} en la cual todo morfismo es un isomorfismo se llama un **grupoide**. Si $G_0 := \text{Ob}(\mathcal{C})$ y $G_1 := \text{Mor}(\mathcal{C})$, el grupoide se denota por $G_1 \rightrightarrows G_0$. En términos convencionales, el grupoide está dado por esos dos conjuntos y cuatro funciones r, s, i, u (meta, fuente, inversión, unidad) definidas como sigue: si $f : x \rightarrow y$ es un morfismo con inverso $g : y \rightarrow x$, entonces

$$\begin{array}{ll} r : G_1 \rightarrow G_0 : f \mapsto y, & i : G_1 \rightarrow G_1 : f \mapsto g, \\ s : G_1 \rightarrow G_0 : f \mapsto x, & u : G_0 \rightarrow G_1 : x \mapsto 1_x. \end{array}$$

El conjunto de morfismos componibles es $G_2 := \{ (f, h) \in G_1 \times G_1 : r(h) = s(f) \}$. \diamond

⁶Una *topología* \mathcal{T} es una colección de partes de X tales que $\emptyset, X \in \mathcal{T}$; $U, V \in \mathcal{T} \implies U \cap V \in \mathcal{T}$; y cada $V_j \in \mathcal{T} \implies \bigcup_j V_j \in \mathcal{T}$.

Hay otras categorías cuyos morfismos no son funciones entre conjuntos. Los morfismos pueden tener cualquier aspecto que cumple con las condiciones (a), (b), (c) de la Definición 2.1.

Ejemplo 2.8. Para cada anillo R , se puede definir una categoría pequeña $\text{Mat-}R$ con objetos $\text{Ob}(\text{Mat-}R) = \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$ en donde $\text{Mat-}R(n, m) = M_{m \times n}(R)$ es el conjunto de matrices $m \times n$ con entradas en R . La ley de composición es la multiplicación de matrices: si $A: n \rightarrow m$ y $B: m \rightarrow k$, entonces el morfismo compuesto es el producto matricial $BA: n \rightarrow k$. [Fíjese que $A \in M_{m \times n}(R)$ y $B \in M_{k \times m}(R)$ implican que $BA \in M_{k \times n}(R)$.] \diamond

En el ejemplo anterior, se ha tomado $M_{m \times n}(R)$ como $\text{Mat-}R(n, m)$ porque una matriz $m \times n$ representa una aplicación de R^n en R^m . Así, se obtiene el producto matricial BA en vez de AB . Resulta que esta inversión del orden usual de multiplicación conduce a una de las rasgos más útiles de las categorías: el concepto de *dualidad*.

Definición 2.9. La **categoría opuesta** de una categoría C es la categoría C° definida por

$$\text{Ob}(C^\circ) := \text{Ob}(C), \quad C^\circ(A, B) := C(B, A). \quad (2.1)$$

C° posee los mismos objetos que C pero “las flechas apunten en la dirección contraria”. Al denotar (por esta sola vez) por f° el morfismo $f \in C(A, B)$ visto como elemento de $C^\circ(B, A)$, la ley de composición en C° es $f^\circ g^\circ := (gf)^\circ$. \diamond

Por ejemplo, si J es la categoría determinada por un poset (J, \leq) , entonces J° corresponde con el poset (J, \geq) con el orden reverso.

Definición 2.10. Una categoría C es una **subcategoría** de otra categoría D si $\text{Ob}(C) \subseteq \text{Ob}(D)$ y $C(A, B) \subseteq D(A, B)$ para todo $A, B \in C$.

Dícese que C es una **subcategoría plena** de D si $C(A, B) = D(A, B)$ para todo $A, B \in C$. (Por ejemplo, Ab es una subcategoría plena de Grp .) \diamond

Notación. Algunas de las categorías del Ejemplo 2.3 poseen subcategorías plenas definidas por alguna condición de finitud. Por costumbre, se denotan esas subcategorías por una letra minúscula inicial. Así, set denota la categoría de conjuntos finitos; grp es la categoría de grupos finitos; $\text{vect-}\mathbb{F}$ es la categoría de espacios \mathbb{F} -vectoriales de dimensión finita; y $R\text{-mod}$ es la categoría de R -módulos (izquierdos) finitamente generados.

► En vista de que los morfismos no siempre son funciones, es necesario reformular ciertas propiedades de morfismos para eliminar las referencias a evaluaciones puntuales.

Definición 2.11. Un morfismo $f \in C(A, B)$ es **mónico**, o es un **monomorfismo**, si para todo $h, k \in C(D, A)$ con $D \in C$, se verifica $fh = fk \implies h = k$.

Un morfismo $g \in C(A, B)$ es **épico**, o es un **epimorfismo**, si para todo $h, k \in C(B, C)$ con $C \in C$, se verifica $hg = kg \implies h = k$. \diamond

Obsérvese que f es un monomorfismo en \mathcal{C} si y solo si f es un epimorfismo en \mathcal{C}° (y viceversa). Dícese que un monomorfismo *admite cancelación a la izquierda* y que un epimorfismo *admite cancelación a la derecha*.

En la categoría **Set**, el morfismo f es mónico si y solo si la función f es inyectiva; el morfismo g es épico si y solo si la función g es sobreyectiva.

Por lo tanto, se usa la notación $f: A \rightarrowtail B$ para denotar un monomorfismo f ; y se usa la notación $g: A \twoheadrightarrow B$ para denotar un epimorfismo g .

Ejemplo 2.12. En la categoría **Ring**, la inclusión $i: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ es inyectiva y por tanto es un monomorfismo de anillos. Por otro lado, un homomorfismo inyectivo de anillos $f: \mathbb{Q} \rightarrow R$ queda determinado por su restricción a \mathbb{Z} , porque $f(p/q) = f(p)/f(q)$ si $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Entonces $h \circ i = k \circ i$ implica $h = k$ si $h, k: \mathbb{Q} \rightarrow R$; esto dice que i es un epimorfismo. Este es un ejemplo de un epimorfismo no sobreyectivo. También es un ejemplo de un morfismo que es mónico y épico a la vez, pero no es un isomorfismo. \diamond

Escolio 2.13. En la categoría $R\text{-Mod}$, $f \in \text{Hom}_R(A, B)$ es mónico si y solo si f es inyectivo, y $g \in \text{Hom}_R(A, B)$ es épico si y solo si g es sobreyectivo. (En efecto, si $\ker f \neq 0$ entonces f no es mónico; y si $\text{coker } g \neq 0$ entonces g no es épico.) \square

2.2 Funtores y transformaciones naturales

Definición 2.14. Si \mathcal{C} y \mathcal{D} son dos categorías, un **funtor covariante** $\mathcal{F}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ consta de:

1. una aplicación $\text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{D}) : A \mapsto \mathcal{F}A$;
2. otra aplicación $\text{Mor}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Mor}(\mathcal{D}) : h \mapsto \mathcal{F}h$, tal que

$$h \in \mathcal{C}(A, B) \implies \mathcal{F}h \in \mathcal{D}(\mathcal{F}A, \mathcal{F}B);$$

que cumple las siguientes condiciones:

- (a) $\mathcal{F}(hk) = (\mathcal{F}h)(\mathcal{F}k)$ toda vez que $k \in \mathcal{C}(A, B)$ y $h \in \mathcal{C}(B, C)$;
- (b) $\mathcal{F}1_A = 1_{\mathcal{F}A}$ para todo $A \in \mathcal{C}$. \diamond

Definición 2.15. Un **funtor contravariante** de una categoría \mathcal{C} en otra categoría \mathcal{D} es un funtor covariante $\mathcal{G}: \mathcal{C}^\circ \rightarrow \mathcal{D}$.

En otras palabras, hay dos aplicaciones $\text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{D}) : A \mapsto \mathcal{G}A$ y $\text{Mor}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Mor}(\mathcal{D}) : h \mapsto \mathcal{G}h$ que cumplen

$$h \in \mathcal{C}(A, B) \implies \mathcal{G}h \in \mathcal{D}(\mathcal{G}B, \mathcal{G}A);$$

además, $\mathcal{G}1_A = 1_{\mathcal{G}A}$ para todo $A \in \mathcal{C}$ y se verifica $\mathcal{G}(hk) = (\mathcal{G}k)(\mathcal{G}h)$ toda vez que $k \in \mathcal{C}(A, B)$ y $h \in \mathcal{C}(B, C)$.

Dicho de otra maneras, un funtor contravariante “revierte el sentido de las flechas”. \diamond

Ejemplo 2.16. Si \mathcal{C} es una categoría cuyos objetos son conjuntos y cuyos morfismos son funciones, hay un **functor olvidadizo** $\mathcal{U}: \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$ por $\mathcal{U}A := A$ y $\mathcal{U}h := h$. Esta definición, aparentemente trivial, lleva cada objeto al conjunto subyacente y lleva cada morfismo a la función subyacente, “olvidando” cualquier otra estructura de los objetos y morfismos de \mathcal{C} . (Por ejemplo, el functor olvidadizo $\mathcal{U}: \text{Grp} \rightarrow \text{Set}$ “olvida” el producto entre elementos de un grupo y la propiedad multiplicativa de los homomorfismos.) Hay otros funtores olvidadizos $\text{Ab} \rightarrow \text{Set}$, $\text{Ring} \rightarrow \text{Set}$, $\text{Vect-}\mathbb{F} \rightarrow \text{Set}$, etcétera, que suprimen las operaciones de producto, suma o multiplicación escalar.

De igual manera, hay funtores olvidadizos $\text{Ring} \rightarrow \text{Ab}$ (que olvida la operación de producto), $R\text{-Mod} \rightarrow \text{Ab}$ (que olvida la acción del anillo R), $\text{Diff} \rightarrow \text{Top}$ (que olvida la estructura diferencial), etcétera. \diamond

Ejemplo 2.17. Cada categoría \mathcal{C} determina un **functor idéntico** $1_{\mathcal{C}}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ mediante las aplicaciones triviales $1_{\mathcal{C}}(A) = A$, $1_{\mathcal{C}}(h) = h$ para $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, $h \in \text{Mor}(\mathcal{C})$. \diamond

Ejemplo 2.18. Si X es un conjunto, $\mathcal{P}X$ denota el conjunto de todas las partes de X . Si $f: X \rightarrow Y$ es una función, defínase la imagen directa $f_*: A \mapsto f(A) \subseteq Y$ para todo $A \subseteq X$; fíjese que $f_*(\emptyset) = \emptyset$. Las correspondencias $X \mapsto \mathcal{P}X$, $f \mapsto f_*$ definen un functor covariante $\mathcal{P}: \text{Set} \rightarrow \text{Set}$.

Si en vez de la imagen directa se usa la *preimagen* (o imagen inversa) $f^*: B \mapsto f^{-1}(B) \subseteq X$ para todo $B \subseteq Y$, las correspondencias $X \mapsto \mathcal{P}X$, $f \mapsto f^*$ definen un functor contravariante $\mathcal{P}: \text{Set}^\circ \rightarrow \text{Set}$. \diamond

Ejemplo 2.19. Sean J y K dos posets, con conjuntos de objetos J y K . Un functor $\mathcal{F}: J \rightarrow K$ es una función $f: J \rightarrow K$ y una aplicación que lleva la única flecha $i \rightarrow j$, si $i \leq j$, en la única flecha $f(i) \rightarrow f(j)$, necesariamente; lo cual implica que $f(i) \leq f(j)$. En otras palabras, la función f debe ser *monótona* (creciente).

De manera similar, cada functor $\mathcal{G}: J^\circ \rightarrow K$ corresponde a una función monótona decreciente $g: J \rightarrow K$; esto es, $i \leq j \implies g(i) \geq g(j)$. \diamond

Ejemplo 2.20. Los complejos de R -módulos (1.9) son objetos de una categoría $R\text{-Comp}$, junto con los morfismos de complejos (1.11). Para cada $n \in \mathbb{N}$, los grupos de homología definen correspondencias $(A_\bullet, d) \mapsto H_n(A)$ entre objetos de $R\text{-Comp}$ y objetos de $R\text{-Mod}$. El Lema 1.27 dice que la correspondencia entre $u_\bullet: A_\bullet \rightarrow B_\bullet$ y $u_*: H_n(A) \rightarrow H_n(B)$ es *functorial* – es decir, cumple las propiedades (a) y (b) de la Definición 2.14. De este modo, $A_\bullet \mapsto H_n(A)$ y $u_\bullet \mapsto u_*$ define un **functor de homología** $H_n: R\text{-Comp} \rightarrow R\text{-Mod}$. \diamond

Definición 2.21. El **producto directo** de dos categorías \mathcal{C} y \mathcal{D} es la categoría $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ cuyos objetos son pares ordenados (A, B) con $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ y $B \in \text{Ob}(\mathcal{D})$; los morfismos en $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ ($(A, B), (E, F)$) son pares ordenados (f, h) con $f \in \mathcal{C}(A, E)$ y $h \in \mathcal{D}(B, F)$; su ley de composición es $(g, k)(f, h) := (gf, kh)$; y $1_{(A, B)} := (1_A, 1_B)$.

Un **bifunctor** de \mathcal{C} y \mathcal{D} en \mathcal{E} es un funtor $\mathcal{F}: \mathcal{C} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$. Así, cada $\mathcal{F}(A, -): \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ y cada $\mathcal{F}(-, B): \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}$ es un funtor (covariante) y el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(A, B) & \xrightarrow{\mathcal{F}(f, 1_B)} & \mathcal{F}(E, B) \\ \mathcal{F}(1_A, h) \downarrow & & \downarrow \mathcal{F}(1_E, h) \\ \mathcal{F}(A, F) & \xrightarrow{\mathcal{F}(f, 1_F)} & \mathcal{F}(E, F) \end{array}$$

para todo $f \in \mathcal{C}(A, E)$ y $h \in \mathcal{D}(B, F)$. \diamond

Definición 2.22. Un funtor $\mathcal{F}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ es (a) **fiel**, (b) **pleno**, o (c) **plenamente fiel** si para todo $A, B \in \mathcal{C}$, la función $h \mapsto \mathcal{F}h: \mathcal{C}(A, B) \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{F}A, \mathcal{F}B)$ es (a) inyectiva, (b) sobreyectiva, o (c) biyectiva, respectivamente. \diamond

Ejemplo 2.23. Los funtores olvidadizos $\text{Grp} \rightarrow \text{Set}$, $\text{Ab} \rightarrow \text{Set}$, $\text{Ring} \rightarrow \text{Ab}$, $R\text{-Mod} \rightarrow \text{Ab}$ y $\text{Diff} \rightarrow \text{Top}$ del Ejemplo 2.16 son todos fieles pero no son plenos.

La *proyección* $\mathcal{P}_1: \mathcal{C} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$, definido por $\mathcal{P}_1((A, X)) := A$, $\mathcal{P}((f, h)) := f$, es plena pero generalmente no es fiel.

Si \mathcal{C} es una subcategoría plena de \mathcal{D} , la inclusión $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ es un funtor plenamente fiel.⁷ \diamond

► Cualquier objeto en una categoría \mathcal{C} define dos funtores de \mathcal{C} en Set , *representados* por ese objeto, uno covariante y otro contravariante.

Definición 2.24. Si \mathcal{C} es una categoría y si $A \in \mathcal{C}$, el funtor covariante $\mathcal{C}(A, -): \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$ lleva cada objeto $B \in \mathcal{C}$ en el conjunto $\mathcal{C}(A, B)$. Para cada $g \in \mathcal{C}(B, C)$, el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ f \swarrow & & \searrow gf \\ B & \xrightarrow{g} & C \end{array}$$

muestra que este funtor debe llevar g en la *precomposición* $f \mapsto gf$:

$$g_* \equiv \mathcal{C}(A, g): f \mapsto gf: \mathcal{C}(A, B) \rightarrow \mathcal{C}(A, C).$$

Si $h \in \mathcal{C}(C, D)$, entonces $\mathcal{C}(A, hg): f \mapsto hgf$ compone $f \mapsto gf$ con $gf \mapsto hgf$, de modo que

$$(hg)_* = \mathcal{C}(A, hg) = \mathcal{C}(A, h) \circ \mathcal{C}(A, g) = h_* g_*$$

y obviamente $(1_B)_*: f \mapsto 1_B f = f$, de modo que $(1_B)_* = 1_{\mathcal{C}(A, B)}$. Estas relaciones establecen que $\mathcal{C}(A, -)$ es un funtor covariante de \mathcal{C} en Set . \diamond

⁷De ahí se ve que un funtor plenamente fiel no es necesariamente una biyección *entre los objetos* de \mathcal{C} y \mathcal{D} .

Definición 2.25. Si \mathcal{C} es una categoría y si $B \in \mathcal{C}$, el funtor contravariante $\mathcal{C}(-, B) : \mathcal{C}^\circ \rightarrow \text{Set}$ lleva cada objeto $A \in \mathcal{C}$ en el conjunto $\mathcal{C}(A, B)$. Para cada $h \in \mathcal{C}(C, D)$, el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{h} & D \\ & \searrow gh & \swarrow g \\ & B & \end{array}$$

muestra que este funtor debe llevar h en la *poscomposición* $g \mapsto gh$:

$$h^* \equiv \mathcal{C}(h, B) : g \mapsto gh : \mathcal{C}(D, B) \rightarrow \mathcal{C}(C, B).$$

Si $k \in \mathcal{C}(A, C)$, entonces $\mathcal{C}(hk, B) : g \mapsto ghk$ compone $g \mapsto gh$ con $gh \mapsto ghk$, de modo que

$$(hk)^* = \mathcal{C}(hk, B) = \mathcal{C}(k, B) \circ \mathcal{C}(h, B) = k^* h^*$$

y obviamente $(1_D)^* : g \mapsto g 1_D = g$, de modo que $(1_D)^* = 1_{\mathcal{C}(D, B)}$. Estas relaciones establecen que $\mathcal{C}(-, B)$ es un funtor contravariante de \mathcal{C} en Set . \diamond

Los dos funtores anteriores pueden combinarse en un bifuntor

$$\mathcal{C}(-, -) : \mathcal{C}^\circ \times \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$$

dado por $(A, B) \mapsto \mathcal{C}(A, B)$ y $(f, g) \mapsto (f^*, g_*) : h \mapsto ghf$ cuando $f \in \mathcal{C}(D, A)$, $g \in \mathcal{C}(B, C)$ para cada $h \in \mathcal{C}(A, B)$.

Definición 2.26. Sea A un R -módulo izquierdo. Su **módulo dual** $A^* := \text{Hom}_R(A, R)$ es un R -módulo *derecho*, bajo la acción de R dado por

$$\underline{fr}(a) := f(a)r \quad \text{para todo } f \in A^*, r \in R, a \in A.$$

Para todo $s \in R$, vale $\underline{fr}(sa) = f(sa)r = sf(a)r = s(\underline{fr})(a)$ para todo $a \in A$, así que $\underline{fr} : A \rightarrow R$ conmuta con la acción a la izquierda de R , es decir, $\underline{fr} \in \text{Hom}_R(A, R)$. Si $\varphi : A \rightarrow C$ es un homomorfismo de R -módulos (izquierdos), su **transpuesta** es la aplicación

$$\varphi^t : C^* \rightarrow A^* : g \mapsto g \circ \varphi.$$

Si $\psi : C \rightarrow D$ es otro R -homomorfismo, entonces $(\psi \circ \varphi)^t = \varphi^t \circ \psi^t : h \mapsto h \circ \psi \circ \varphi$. En otras palabras, $A \mapsto A^*$, $\varphi \mapsto \varphi^t$ es un *funtor contravariante* $\mathcal{D} : (R\text{-Mod})^\circ \rightarrow \text{Mod-}R$, llamado **dualidad**.

De la misma manera, si B es un R -módulo derecho, entonces $B^* := \text{Hom}_R(B, R)$ es un R -módulo izquierdo, al definir $\underline{tg}(b) := tg(b)$ para todo $g \in B^*$, $t \in R$, $b \in B$, ya que $(tg)(bs) = tg(bs) = tg(b)s = (\underline{tg})(b)s$ para $s \in R$. Luego $B \mapsto B^*$, $\chi \mapsto \chi^t$ es otro funtor de dualidad $\mathcal{D} : (\text{Mod-}R)^\circ \rightarrow R\text{-Mod}$.

Al combinar estos dos funtores, se obtiene un funtor covariante $\mathcal{D}^2 : R\text{-Mod} \rightarrow R\text{-Mod}$, dado por $\mathcal{D}^2 A \equiv A^{**} := \text{Hom}_R(A^*, R)$, el **R-módulo bidual** de A ; y para $\varphi : A \rightarrow C$, se define $\mathcal{D}^2 \varphi := \varphi^{tt} = (\varphi^t)^t : A^{**} \rightarrow C^{**}$, la *transpuesta doble* de φ . \diamond

Ejemplo 2.27. Si V es un espacio \mathbb{F} -vectorial finitodimensional, se puede definir un isomorfismo \mathbb{F} -lineal entre V y $V^* = \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, \mathbb{F})$ al llevar una base de V a la base dual de V^* . Pero no hay un isomorfismo preferido $T: V \rightarrow V^*$ independiente de una elección de bases.

En cambio, sí hay una aplicación “canónica” o “natural” entre V y su espacio bidual V^{**} , dada por la **evaluación** $\lambda_V: V \rightarrow V^{**}$, definida como sigue:

$$\lambda_V(x): f \mapsto f(x), \quad \text{para todo } x \in V, f \in V^*. \quad (2.2)$$

Esta definición no requiere elegir bases en V ni en V^{**} . Fíjese que λ_V es biyectiva porque $\dim_{\mathbb{F}} V$ es finita.⁸

Si $S: V \rightarrow W$ es una transformación \mathbb{F} -lineal, entonces para cada $x \in V, g \in W^*$, vale

$$(S^{tt} \circ \lambda_V(x))(g) = \lambda_V(x)(S^t(g)) = \lambda_V(x)(g \circ S) = g \circ S(x) = g(S(x)) = \lambda_W(S(x))(g),$$

de modo que

$$\lambda_W \circ S = S^{tt} \circ \lambda_V: V \rightarrow W^{**}. \quad (2.3)$$

En otras palabras, la *familia de evaluaciones* $\{\lambda_V: V \in \text{vect-}\mathbb{F}\}$ *entrelaza* las acciones del funtor identidad $1_{\text{vect-}\mathbb{F}}$ y del funtor de bidualidad $\mathcal{D}^2: \text{vect-}\mathbb{F} \rightarrow \text{vect-}\mathbb{F}$. \diamond

La propiedad (2.3) de la familia de evaluaciones es una primera instancia del concepto de *naturalidad* o *canonicidad* identificado por Eilenberg y MacLane como la idea clave de su definición de categorías. Se trata de la relación siguiente entre dos funtores.

Definición 2.28. Si $\mathcal{F}, \mathcal{G}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ son dos funtores entre las mismas categorías, una **transformación natural** de \mathcal{F} en \mathcal{G} , denotada por $\alpha: \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G}$, es una *familia de morfismos* $\alpha_A \in \mathcal{D}(\mathcal{F}A, \mathcal{G}A)$, uno para cada $A \in \mathcal{C}$, que entrelazan los dos funtores, así:

$$\alpha_B \circ \mathcal{F}h = \mathcal{G}h \circ \alpha_A \quad \text{para cada } h \in \mathcal{C}(A, B). \quad (2.4a)$$

Dicho de otro modo: para cada $h \in \text{Mor}(\mathcal{C})$, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}A & \xrightarrow{\alpha_A} & \mathcal{G}A \\ \mathcal{F}h \downarrow & & \downarrow \mathcal{G}h \\ \mathcal{F}B & \xrightarrow{\alpha_B} & \mathcal{G}B \end{array} \quad (2.4b)$$

Para funtores contravariantes $\mathcal{F}, \mathcal{G}: \mathcal{C}^\circ \rightarrow \mathcal{D}$, el diagrama conmutativo apropiado es:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}A & \xrightarrow{\alpha_A} & \mathcal{G}A \\ \mathcal{F}h \uparrow & & \uparrow \mathcal{G}h \\ \mathcal{F}B & \xrightarrow{\alpha_B} & \mathcal{G}B \end{array} \quad (2.4c)$$

Los morfismos α_A son los *componentes* de la transformación natural α .

⁸Si V fuera infinitodimensional sobre \mathbb{F} , la evaluación λ_V sería inyectiva pero no sobreyectiva.

Dícese que α es un **isomorfismo natural** si cada α_A es un isomorfismo en D . En tal caso, los morfismos inversos $\alpha_A^{-1}: \mathcal{G}A \rightarrow \mathcal{F}A$ dan lugar a diagramas conmutativos al revertir las flechas horizontales en (2.4b) y (2.4c); así que $\alpha^{-1}: \mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{F}$ también es natural.

Una transformación natural también se llama **morfismo de funtores**. Hay una categoría⁹ $\text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = \underline{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}}$ cuyos objetos son los funtores $\mathcal{F}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ y cuyos morfismos son las transformaciones naturales $\alpha: \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G}$. Cada funtor determina la transformación idéntica $1_{\mathcal{F}}: \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{F}$, definida por $(1_{\mathcal{F}})_A := 1_{\mathcal{F}A}$. La composición de α con otra transformación natural $\beta: \mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{H}$ es $(\beta \cdot \alpha)_A := \beta_A \alpha_A$ para $A \in \mathcal{C}$. \diamond

La naturalidad (2.3) de la bidualidad de espacios vectoriales se puede expresar ahora mediante la fórmula $\lambda: 1_{\text{vect-}\mathbb{F}} \Rightarrow \mathcal{D}^2$.

Ejemplo 2.29. Considérese los funtores $\mathcal{C}(A, -)$ y $\mathcal{C}(-, B)$ de las Definiciones 2.24 y 2.25. Dadas dos morfismos $f: D \rightarrow A$ y $g: B \rightarrow C$ en la categoría \mathcal{C} , hay un diagrama conmutativo de funciones

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(A, B) & \xrightarrow{g_*} & \mathcal{C}(A, C) \\ f_* \downarrow & & \downarrow f_* \\ \mathcal{C}(D, B) & \xrightarrow{g_*} & \mathcal{C}(D, C) \end{array}$$

que lleva cada $h \in \mathcal{C}(A, B)$ a $ghf = (gh)f = g(hf) \in \mathcal{C}(D, C)$.

En este diagrama, las flechas verticales denotan las acciones de los funtores $\mathcal{C}(-, B)$ y $\mathcal{C}(-, C)$ de \mathcal{C}° en Set . Las flechas horizontales denotan una transformación natural $g_*: \mathcal{C}(-, B) \Rightarrow \mathcal{C}(-, C)$. Los componentes de esta transformación son las funciones de precomposición $(g_*)_A: \mathcal{C}(A, B) \rightarrow \mathcal{C}(A, C)$ y $(g_*)_D: \mathcal{C}(D, B) \rightarrow \mathcal{C}(D, C)$, respectivamente; la conmutatividad del diagrama dice que la transformación g_* es natural.

Al mismo tiempo, las flechas horizontales denotan las acciones de los funtores $\mathcal{C}(A, -)$ y $\mathcal{C}(D, -)$ de \mathcal{C} en Set . Las flechas verticales denotan una transformación natural $f^*: \mathcal{C}(A, -) \Rightarrow \mathcal{C}(D, -)$. Los componentes de esta transformación son las funciones de poscomposición $(f^*)_B: \mathcal{C}(A, B) \rightarrow \mathcal{C}(D, B)$ y $(f^*)_C: \mathcal{C}(A, C) \rightarrow \mathcal{C}(D, C)$, respectivamente; la conmutatividad del diagrama dice que la transformación f^* es natural.

En resumen: el bifunctor $\mathcal{C}(-, -): \mathcal{C}^\circ \times \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$ es *natural en sus dos variables*. \diamond

► Dos categorías \mathcal{C} y \mathcal{D} son *isomorfas* si hay funtores $\mathcal{F}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ y $\mathcal{G}: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ mutuamente inversos, esto es: $\mathcal{G}\mathcal{F} = 1_{\mathcal{C}}$ y $\mathcal{F}\mathcal{G} = 1_{\mathcal{D}}$. Sin embargo, esta noción es de poca utilidad porque no hay muchos ejemplos de interés. En cambio, al reemplazar estas igualdades por isomorfismos naturales, se llega a un concepto importante.

⁹Si \mathcal{C} es una categoría pequeña, esta definición de $\text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ es inobjetable. De lo contrario, hay que resolver ciertos detalles de la teoría de conjuntos, que se dejan al cuidado del lector.

Definición 2.30. Dos categorías \mathcal{C} y \mathcal{D} son **naturalmente equivalentes** si hay funtores $\mathcal{F}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ y $\mathcal{G}: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ y un par de isomorfismos naturales $\alpha: \mathcal{G}\mathcal{F} \Rightarrow 1_{\mathcal{C}}$ y $\beta: \mathcal{F}\mathcal{G} \Rightarrow 1_{\mathcal{D}}$.

Los funtores \mathcal{F} y \mathcal{G} se llaman **equivalencias de categorías**. A veces se dice que \mathcal{F} y \mathcal{G} son *cuasiinversos*. \diamond

Ejemplo 2.31. Sea \mathbf{set} la categoría de conjuntos finitos y sea \mathbf{N} la subcategoría plena cuyos objetos son $\underline{n} := \{0, 1, \dots, n-1\}$ (con $\underline{0} = \emptyset$) para $n \in \mathbb{N}$. La inclusión $\mathcal{I}: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{set}$ es una equivalencia de categorías.

En efecto, para cada conjunto finito X_n de cardinalidad n , elíjase¹⁰ un ordenamiento de sus elementos, $X_n = \{x_0, \dots, x_{n-1}\}$. Defínase $\mathcal{J}: \mathbf{set} \rightarrow \mathbf{N}$ por $\mathcal{J}X_n := \underline{n}$ y $\mathcal{J}f(j) := k$ toda vez que $f \in \mathbf{set}(X_n, Y_m)$ cumple $f(x_j) = y_k$, con $j = 0, 1, \dots, n-1$. Entonces $\mathcal{J}\mathcal{I}\underline{n}$ es una permutación α_n de \underline{n} y $\mathcal{I}\mathcal{J}X$ es una permutación β_X de X , en cada caso. \diamond

Definición 2.32. Un functor $\mathcal{F}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ es **esencialmente sobreyectivo** si para cada $X \in \mathcal{D}$ hay un $A \in \mathcal{C}$ tal que $\mathcal{F}A$ es *isomorfo* a X ; es decir, el conjunto $\mathbf{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}A, X)$ contiene un isomorfismo. \diamond

Fíjese que la inclusión $\mathcal{I}: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{set}$ del Ejemplo 2.31 es esencialmente sobreyectivo: para cada conjunto finito X existe un $n \in \mathbb{N}$ (la cardinalidad de X) para el cual existe una biyección entre $\{0, 1, \dots, n-1\}$ y X .

Proposición 2.33. *Un functor $\mathcal{F}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ es una equivalencia de categorías si y solo si \mathcal{F} es plenamente fiel y esencialmente sobreyectivo.*

Demostración. $\text{Ad} \implies$: Sean $\mathcal{F}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ y $\mathcal{G}: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ dos funtores tales que existen isomorfismos naturales $\alpha: \mathcal{G}\mathcal{F} \Rightarrow 1_{\mathcal{C}}$ y $\beta: \mathcal{F}\mathcal{G} \Rightarrow 1_{\mathcal{D}}$. Para todo $h \in \mathcal{C}(A, B)$, se verifica $\alpha_B \circ \mathcal{G}\mathcal{F}h \circ \alpha_A^{-1} = h$, así que $h \mapsto \mathcal{F}h$ es inyectivo. De igual manera $k \mapsto \mathcal{G}k$ es inyectivo. Si $k \in \mathcal{D}(\mathcal{F}A, \mathcal{F}B)$, sea $h := \alpha_B \circ \mathcal{G}k \circ \alpha_A^{-1}$. Entonces $\mathcal{G}\mathcal{F}h = \mathcal{G}k$ porque α_A y α_B son isomorfismos, luego $\mathcal{F}h = k$; así, $h \mapsto \mathcal{F}h$ es sobreyectivo. En fin, \mathcal{F} define biyecciones $\mathcal{C}(A, B) \leftrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{F}A, \mathcal{F}B)$; en otras palabras (véase la Definición 2.22), \mathcal{F} es plenamente fiel.

Además, los isomorfismos $\alpha_A: \mathcal{G}\mathcal{F}A \rightarrow A$ y $\beta_E: \mathcal{F}\mathcal{G}E \rightarrow E$ muestran que \mathcal{G} y \mathcal{F} son esencialmente sobreyectivos.

$\text{Ad} \impliedby$: Si \mathcal{F} es plenamente fiel y esencialmente sobreyectivo, entonces para cada $E \in \mathcal{D}$, se puede encontrar un objeto $A \in \mathcal{C}$ y un isomorfismo $\beta_E \in \mathcal{D}(\mathcal{F}A, E)$, usando el axioma de elección. Escribáse $\mathcal{G}E := A$. Cada $k \in \mathcal{D}(E, F)$ determina un morfismo $\beta_F^{-1}k\beta_E \in \mathcal{D}(\mathcal{F}\mathcal{G}E, \mathcal{F}\mathcal{G}F)$. Como \mathcal{F} es plenamente fiel, hay un único morfismo $h \in \mathcal{C}(\mathcal{G}E, \mathcal{G}F)$ tal que $\mathcal{F}h = \beta_F^{-1}k\beta_E$; escribáse $\mathcal{G}k := h$. Es fácil comprobar que estas correspondencias $E \mapsto A$, $k \mapsto h$ determinan un functor $\mathcal{G}: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$. Además, la relaciones $\beta_F \mathcal{F}\mathcal{G}k = k\beta_E$ en $\mathcal{D}(\mathcal{F}\mathcal{G}E, F)$ para todo $k \in \mathcal{D}(E, F)$ dicen que los β_E son componentes de un isomorfismo natural $\beta: \mathcal{F}\mathcal{G} \Rightarrow 1_{\mathcal{D}}$.

¹⁰Mediante el axioma de elección, desde luego.

Como \mathcal{F} es plenamente fiel, cada isomorfismo $\beta_{\mathcal{F}A} \in D(\mathcal{F}\mathcal{G}\mathcal{F}A, \mathcal{F}A)$ está dado por $\beta_{\mathcal{F}A} = \mathcal{F}\alpha_A$ para un único isomorfismo $\alpha_A \in C(\mathcal{G}\mathcal{F}A, A)$. Si $g \in C(A, B)$ y si $k := \mathcal{F}g \in D(\mathcal{F}A, \mathcal{F}B)$, entonces

$$\mathcal{F}g \beta_{\mathcal{F}A} = k \beta_{\mathcal{F}A} = \beta_{\mathcal{F}B} \mathcal{F}h = \beta_{\mathcal{F}B} \mathcal{F}gk = \beta_{\mathcal{F}B} \mathcal{F}\mathcal{G}\mathcal{F}g,$$

o bien $\mathcal{F}g \mathcal{F}\alpha_A = \mathcal{F}\alpha_B \mathcal{F}\mathcal{G}\mathcal{F}g$. Como \mathcal{F} es fiel, esto dice que $g \alpha_A = \alpha_B \mathcal{G}\mathcal{F}g$. Por lo tanto, los α_A son componentes de un isomorfismo natural $\alpha: \mathcal{G}\mathcal{F} \Rightarrow 1_C$. \square

► Algunos funtores cuya categoría meta es \mathbf{Set} juegan un papel destacado en la teoría.

Definición 2.34. Sea C una categoría cualquiera. Un funtor covariante $\mathcal{F}: C \rightarrow \mathbf{Set}$ es **representable** si \mathcal{F} es naturalmente isomorfo a $C(A, -)$ para algún objeto $A \in C$.

De igual manera, un funtor contravariante $\mathcal{G}: C^\circ \rightarrow \mathbf{Set}$ es representable si \mathcal{G} es naturalmente isomorfo a $C(-, B)$ para algún objeto $B \in C$. \diamond

Ejemplo 2.35. El funtor idéntico $1_{\mathbf{Set}}: \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$ está representado por el singulete $1 = \{0\}$ (o bien por cualquier otro conjunto con un solo elemento). En efecto, si $X \in \mathbf{Set}$, hay una biyección $\alpha_X: \mathbf{Set}(1, X) \rightarrow X$ que lleva la función $0 \mapsto x$ al elemento $x \in X$. Si $f: X \rightarrow Y$ es un morfismo en \mathbf{Set} (esto es, una función), entonces la función compuesta $1 \xrightarrow{x} X \xrightarrow{f} Y$ es $0 \mapsto f(x)$; esto dice que $f \circ \alpha_X = \alpha_Y \circ f_*: \mathbf{Set}(1, X) \rightarrow Y$, así que los α_X son componentes de un isomorfismo natural $\alpha: \mathbf{Set}(1, -) \Rightarrow 1_{\mathbf{Set}}$. \diamond

Ejemplo 2.36. El funtor contravariante $\mathcal{P}: \mathbf{Set}^\circ \rightarrow \mathbf{Set}$ del Ejemplo 2.18 está representado por el conjunto $2 = \{0, 1\}$. En efecto, cada función en $\mathbf{Set}(X, 2)$ es la *función indicatriz* χ_A de $A \subseteq X$, dada por $\chi_A(z) := 1$ si $z \in A$, $\chi_A(z) := 0$ si $z \in X \setminus A$. La biyección $\beta_X: A \mapsto \chi_A$ es una función $\beta_X: \mathcal{P}X \rightarrow \mathbf{Set}(X, 2)$. A cada función $f: X \rightarrow Y$ en \mathbf{Set} le corresponde una aplicación de preimágenes $\mathcal{P}Y \rightarrow \mathcal{P}X: B \mapsto f^{-1}(B)$ y también una poscomposición $f^*: \mathbf{Set}(Y, 2) \rightarrow \mathbf{Set}(X, 2): g \mapsto g \circ f$. Obsérvese que $\chi_B \circ f = \chi_{f^{-1}(B)}$ para $B \subseteq Y$; en otros términos, $f^* \beta_Y(B) = \beta_X f^{-1}(B)$ para todo $B \in \mathcal{P}Y$, de modo que este diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}X & \xrightarrow{\beta_X} & \mathbf{Set}(X, 2) \\ f^{-1} \uparrow & & \uparrow f^* \\ \mathcal{P}Y & \xrightarrow{\beta_Y} & \mathbf{Set}(Y, 2) \end{array}$$

Luego, los β_X son componentes de un isomorfismo natural $\beta: \mathcal{P} \Rightarrow \mathbf{Set}(-, 2)$. \diamond

Ejemplo 2.37. El funtor olvidadizo $\mathcal{U}: \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$ está representado por el grupo abeliano \mathbb{Z} . Un homomorfismo de grupos $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow G$ queda determinado por el elemento $\varphi(1) \in G$, porque 1 genera el grupo cíclico \mathbb{Z} , sin relaciones (\mathbb{Z} es el *grupo libre* con un solo generador). Para cada elemento $g \in \mathcal{U}G$, hay un único $\varphi \in \mathbf{Grp}(\mathbb{Z}, G)$ tal que $\varphi(1) = g$. Los $\alpha_G: \mathbf{Grp}(\mathbb{Z}, G) \rightarrow \mathcal{U}G: \varphi \mapsto \varphi(1)$ son componentes de un isomorfismo natural $\alpha: \mathbf{Grp}(\mathbb{Z}, -) \Rightarrow \mathcal{U}$. \diamond

Notación. Para aliviar la notación, conviene introducir abreviaturas $A^\rightarrow := \mathbf{C}(A, -)$ para denotar un funtor representado covariante; y $B^\leftarrow := \mathbf{C}(-, B)$ para denotar un funtor representado contravariante.¹¹

Teorema 2.38 (Lema de Yoneda). *Para cada funtor covariante $\mathcal{F}: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ y cada objeto $A \in \mathbf{C}$, hay una biyección dada por:*

$$\mathbf{Set}^{\mathbf{C}}(\mathbf{C}(A, -), \mathcal{F}) \longleftrightarrow \mathcal{F}A : \alpha \mapsto \alpha_A(1_A). \quad (2.5)$$

Esta biyección es natural en \mathcal{F} y en A .

Demostración. El componente α_A de una transformación natural $\alpha: A^\rightarrow \Rightarrow \mathcal{F}$ es una función $\alpha_A: \mathbf{C}(A, A) \rightarrow \mathcal{F}A$. El conjunto de morfismos $\mathbf{C}(A, A)$ contiene al menos la identidad 1_A , luego $\alpha_A(1_A) \in \mathcal{F}A$. Sea $\Phi: \alpha \mapsto \alpha_A(1_A)$ la función definida por (2.5). Para que Φ sea una biyección, se debe encontrar la función inversa $\Psi: \mathcal{F}A \rightarrow \mathbf{Set}^{\mathbf{C}}(A^\rightarrow, \mathcal{F})$.

Si $x \in \mathcal{F}A$, se busca $\Psi(x): \mathbf{C}(A, -) \Rightarrow \mathcal{F}$, dada por la familia de sus componentes $\Psi(x)_B: \mathbf{C}(A, B) \rightarrow \mathcal{F}B$, que deben hacer conmutativo el siguiente diagrama, para cada $h \in \mathbf{C}(A, B)$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C}(A, A) & \xrightarrow{\Psi(x)_A} & \mathcal{F}A \\ h_* \downarrow & & \downarrow \mathcal{F}h \\ \mathbf{C}(A, B) & \xrightarrow{\Psi(x)_B} & \mathcal{F}B \end{array}$$

En particular, al evaluar las dos composiciones $\mathbf{C}(A, A) \rightarrow \mathcal{F}B$ sobre el elemento $1_A \in \mathbf{C}(A, A)$, se obtiene la condición necesaria $\Psi(x)_B(h) = \mathcal{F}h(\Psi(x)_A(1_A))$. Pero $\Psi(x)_A(1_A) = \Phi(\Psi(x)) = x$ es una condición necesaria para que Ψ sea inverso a Φ . Además, para que cada $\Psi(x)$ sea natural, es necesario $\Psi(x)_B(h) = \mathcal{F}h(x)$ para todo $h \in \mathbf{C}(A, B)$.

Esta condición es también suficiente para que $\Psi(x)$ sea natural: dado otro morfismo $k \in \mathbf{C}(B, C)$, se obtiene

$$\Psi(x)_C(kh) = \mathcal{F}(kh)(x) = \mathcal{F}k(\mathcal{F}h(x)) = \mathcal{F}k(\Psi(x)_B(h)),$$

usando la funtorialidad de \mathcal{F} . Luego $\Psi(x)_C k_* = \mathcal{F}(k) \Psi(x)_B : \mathbf{C}(A, B) \rightarrow \mathcal{F}C$ para todo $k \in \mathbf{C}(B, C)$; por lo tanto, los $\Psi(x)_B$ son componentes de una transformación natural $\Psi(x)$.

Por construcción, $\Phi(\Psi(x)) = x \in \mathcal{F}A$. Por otro lado, dada una transformación natural $\alpha: A^\rightarrow \Rightarrow \mathcal{F}$, se obtiene $\Psi(\Phi(\alpha)) = \alpha$, porque

$$\Psi(\alpha_A(1_A))_B(h) = \mathcal{F}h(\alpha_A(1_A)) = \alpha_B(h_*(1_A)) = \alpha_B(h) \quad \text{para } h \in \mathbf{C}(A, B),$$

usando la naturalidad de α . Esto muestra que Φ y Ψ son inversos y por ende Φ es biyectiva.

¹¹Esta notación no es estándar; otras notaciones son $\widetilde{A}, \widetilde{B}$ (Kato) y h_A, h_B (Gelfand y Manin).

Al decir que esta biyección es “natural en \mathcal{F} ”, se afirma que para todo $\beta: \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G}$ la transformación natural $\beta \cdot \alpha: A^\rightarrow \Rightarrow \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G}$ está representada por el elemento $\beta_A(\alpha_A(1_A)) \in \mathcal{G}A$. Esto sigue porque $(\beta \cdot \alpha)_A = \beta_A \alpha_A$ por definición.

Al decir que esta biyección es “natural en A ”, se afirma que para todo $h \in \mathcal{C}(A, B)$ la transformación natural $\alpha \cdot h^\leftarrow: B^\rightarrow \Rightarrow A^\rightarrow \Rightarrow \mathcal{F}$ está representada por el elemento $\mathcal{F}h(\alpha_A(1_A)) \in \mathcal{F}B$. Esto sigue por la naturalidad de α , porque

$$(\alpha \cdot h^\leftarrow)_B(1_B) = \alpha_B(h_B^\leftarrow(1_B)) = \alpha_B(h^*(1_B)) = \alpha_B(h) = \alpha_B(h_*(1_A)) = \mathcal{F}h(\alpha_A(1_A)). \quad \square$$

Escolio 2.39. Para cada funtor contravariante $\mathcal{F}: \mathcal{C}^\circ \rightarrow \mathbf{Set}$ y cada objeto $A \in \mathcal{C}$, hay una biyección dada por:

$$\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^\circ}(\mathcal{C}(-, A), \mathcal{F}) \longleftrightarrow \mathcal{F}A : \alpha \mapsto \alpha_A(1_A).$$

Esta biyección es natural en \mathcal{F} y en A . □

Cada funtor contravariante A^\leftarrow es un objeto de la categoría $\widehat{\mathcal{C}} := \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^\circ}$. Si $h \in \mathcal{C}(A, B)$, la precomposición $h_*: f \mapsto hf$ lleva $\mathcal{C}(D, A)$ en $\mathcal{C}(D, B)$, de tal manera que $h_*: A^\leftarrow \rightarrow B^\leftarrow$ es un morfismo en $\widehat{\mathcal{C}}$. La correspondencia $A \mapsto A^\leftarrow, h \mapsto h_*$ es un funtor (covariante!) $\mathcal{C} \rightarrow \widehat{\mathcal{C}}$, llamado el **encaje de Yoneda**.¹²

Corolario 2.40. El encaje de Yoneda $\mathcal{C} \rightarrow \widehat{\mathcal{C}}$ es plenamente fiel.

Demostración. Se debe mostrar que, para cada par de objetos $A, B \in \mathcal{C}$, hay una biyección entre $\widehat{\mathcal{C}}(A^\leftarrow, B^\leftarrow)$ y $\mathcal{C}(A, B)$. Escribese $\mathcal{F} := B^\leftarrow$. Cada elemento de $\widehat{\mathcal{C}}(A^\leftarrow, \mathcal{F})$ es una transformación natural $\alpha: A^\leftarrow \Rightarrow \mathcal{F}$, la cual, por el lema de Yoneda (en su versión contravariante, Escolio 2.39), corresponde con el elemento $\alpha_A(1_A) \in \mathcal{F}A = \mathcal{C}(A, B)$.

Así, la biyección buscada es la misma $\alpha \mapsto \alpha_A(1_A)$ del lema de Yoneda. □

De la misma manera, hay un encaje $A \mapsto A^\rightarrow, h \mapsto h^*$ de \mathcal{C}° en $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}}$, plenamente fiel.

Lema 2.41. Si un funtor \mathcal{F} es representable, el objeto que lo representa es único hasta un isomorfismo único.

Demostración. Considérese el caso contravariante. Sean dados dos isomorfismos naturales $\alpha: A^\leftarrow \Rightarrow \mathcal{F}$ y $\beta: B^\leftarrow \Rightarrow \mathcal{F}$. Sea $\gamma := \beta^{-1} \cdot \alpha$, un isomorfismo en $\widehat{\mathcal{C}}(A^\leftarrow, B^\leftarrow)$. Entonces $h := \gamma_A(1_A)$ es un isomorfismo en $\mathcal{C}(A, B)$; en particular, los objetos A y B de \mathcal{C} son isomorfos. El Corolario 2.40 muestra que h es el único elemento de $\mathcal{C}(A, B)$ que corresponde a $\beta^{-1} \cdot \alpha$. □

¹²Nobuo Yoneda y Saunders MacLane coincidieron en París en 1954, en un café de la estación del norte (la Gare du Nord). De sus discusiones, hasta la partida del tren de Yoneda, salió este resultado que MacLane recogió, atribuyéndole a Yoneda. Fue descubierto independientemente por Grothendieck.

2.3 Límites y colímites, propiedades universales

Definición 2.42. Un **objeto inicial** en una categoría \mathcal{C} es un objeto $A \in \mathcal{C}$ tal que $\mathcal{C}(A, B)$ contiene exactamente un morfismo, para todo $B \in \mathcal{C}$.

Un **objeto final** en \mathcal{C} es un objeto $B \in \mathcal{C}$ tal que $\mathcal{C}(A, B)$ contiene exactamente un morfismo, para todo $A \in \mathcal{C}$.

Un **objeto cero** en \mathcal{C} es un objeto que es inicial y final a la vez. \diamond

No todas las categorías contienen objetos de esos tipos. Por ejemplo, en una categoría discreta con al menos dos objetos, ningún objeto es inicial ni terminal.

Por otro lado, dos objetos iniciales A y A' son isomorfos mediante un isomorfismo único. En efecto, si $\mathcal{C}(A, A') = \{f\}$ y $\mathcal{C}(A', A) = \{g\}$, habida cuenta de que $\mathcal{C}(A, A) = \{1_A\}$ y $\mathcal{C}(A', A') = \{1_{A'}\}$, se impone $gf = 1_A$ y $fg = 1_{A'}$, así que f es un isomorfismo con inverso g ; y no hay otro. (De igual manera, dos objetos finales o dos objetos ceros son isomorfos.)

Ejemplo 2.43. En \mathbf{Set} , el conjunto vacío \emptyset es un objeto inicial: la inclusión $\emptyset \subseteq X$ es la única función en $\mathbf{Set}(\emptyset, X)$. El singulete $1 = \{0\}$ es un objeto terminal (como cualquier otro singulete). No hay un objeto cero en \mathbf{Set} .

En $R\text{-Mod}$, el R -módulo trivial 0 es un objeto cero. \diamond

Definición 2.44. Sea \mathbf{J} una categoría pequeña y \mathcal{C} una categoría cualquiera. Un **diagrama** en \mathcal{C} de *forma* \mathbf{J} es un funtor $\mathcal{F}: \mathbf{J} \rightarrow \mathcal{C}$.

Este funtor identifica una familia de objetos $A_j = \mathcal{F}j \in \mathcal{C}$ y una familia de morfismos $\varphi_{kj} = \mathcal{F}f_{kj} \in \mathcal{C}(A_j, A_k)$ para todo $f_{kj} \in \mathbf{J}(j, k)$, tales que $\varphi_{lk}\varphi_{kj} = \varphi_{lj}$ toda vez que $f_{lk}f_{kj} = f_{lj}$. (Si \mathbf{J} es un poset, esto sucede si y solo si $j \leq k \leq l$.) \diamond

Definición 2.45. Un **cono sobre un diagrama** $\mathcal{F}: \mathbf{J} \rightarrow \mathcal{C}$ con **cenit** $B \in \mathcal{C}$ es una familia de morfismos $\{f_j: B \rightarrow A_j: j \in \mathbf{J}\}$ tal que el primer diagrama en (2.6) conmuta, para cada $f_{kj} \in \mathbf{J}(j, k)$.

$$\begin{array}{ccc}
 & B & \\
 f_j \swarrow & & \searrow f_k \\
 A_j & \xrightarrow{\varphi_{kj}} & A_k
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 A_j & \xrightarrow{\varphi_{kj}} & A_k \\
 g_j \searrow & & \swarrow g_k \\
 & C &
 \end{array}
 \tag{2.6}$$

Un **cono bajo un diagrama** $\mathcal{F}: \mathbf{J} \rightarrow \mathcal{C}$ con **nadir** $C \in \mathcal{C}$ es una familia de morfismos $\{g_j: A_j \rightarrow C: j \in \mathbf{J}\}$ tal que el segundo diagrama en (2.6) conmuta, para $f_{kj} \in \mathbf{J}(j, k)$. \diamond

Los triángulos conmutativos en (2.6) son “naturales”, en el siguiente sentido. Un objeto $B \in \mathcal{C}$ da lugar a un *functor constante* $\underline{B}: \mathbf{J} \rightarrow \mathcal{C}$ tal que $A_j = B$ para todo $j \in \mathbf{J}$ y $\varphi_{kj} = 1_B$ para todo f_{kj} . Al reemplazar el cenit B en (2.6) por $B \xrightarrow{1_B} B$, el primer triángulo se convierte en un cuadrado conmutativo. Así, un cono sobre \mathcal{F} es una transformación natural $\beta: \underline{B} \Rightarrow \mathcal{F}$. De igual manera, un cono bajo \mathcal{F} es una transformación natural $\gamma: \mathcal{F} \Rightarrow \underline{C}$.

Dado un diagrama $\mathcal{F}: J \rightarrow \mathbf{C}$, se definen dos funtores de \mathbf{C} en \mathbf{Set} , uno contravariante y otro covariante, denotados

$$\mathcal{A}(-, \mathcal{F}): \mathbf{C}^\circ \rightarrow \mathbf{Set} \quad \text{y} \quad \mathcal{A}(\mathcal{F}, -): \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Set}$$

donde el primero manda $B \in \mathbf{C}$ al conjunto de los conos sobre \mathcal{F} con cenit B ; el segundo manda $C \in \mathbf{C}$ al conjunto de los conos bajo \mathcal{F} con nadir C .

Definición 2.46. Sea $\mathcal{F}: J \rightarrow \mathbf{C}$ un diagrama en \mathbf{C} . Un **límite** para \mathcal{F} , si existe, es una representación de $\mathcal{A}(-, \mathcal{F})$; dada por un objeto $L = \lim \mathcal{F} \in \mathbf{C}$, junto con un isomorfismo natural $\mathbf{C}(-, L) \Rightarrow \mathcal{A}(-, \mathcal{F})$. Por el lema de Yoneda, este isomorfismo corresponde con un *cono límite* sobre \mathcal{F} con cenit L .

Un **colímite** para \mathcal{F} , si existe, es una representación de $\mathcal{A}(\mathcal{F}, -)$; dada por un objeto $K = \text{colim } \mathcal{F} \in \mathbf{C}$, junto con un isomorfismo natural $\mathbf{C}(K, -) \Rightarrow \mathcal{A}(\mathcal{F}, -)$. Por el lema de Yoneda, este isomorfismo corresponde con un *cono colímite* bajo \mathcal{F} con nadir K . \diamond

Cualquier cono sobre \mathcal{F} con cenit B define un elemento del conjunto $\mathcal{A}(B, \mathcal{F})$ y por ende un único morfismo $f' \in \mathbf{C}(B, L)$. La naturalidad de esta correspondencia entre los cenit impone la conmutatividad del siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & B & \\ f_j \swarrow & \downarrow f' & \searrow f_k \\ & L & \\ p_j \swarrow & \downarrow \varphi_{kj} & \searrow p_k \\ A_j & \xrightarrow{\quad} & A_k \end{array} \quad (2.7a)$$

Otra forma de expresar la definición de $L = \lim \mathcal{F}$ es el siguiente. Los conos sobre \mathcal{F} forman una categoría con objetos $(B, \{f_j\})$. El cono límite $(L, \{p_j\})$ es un *objeto terminal* en esa categoría. Un morfismo entre estos objetos es una flecha $f': B \rightarrow L$ en \mathbf{C} que hace conmutativo el diagrama (2.7a). El cono límite es terminal porque existe una única flecha con esta propiedad.

De igual manera, cualquier cono bajo \mathcal{F} con nadir C define un elemento del conjunto $\mathcal{A}(\mathcal{F}, C)$ y por ende un único morfismo $g' \in \mathbf{C}(K, C)$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} A_j & \xrightarrow{\varphi_{kj}} & A_k \\ i_j \searrow & & \swarrow i_k \\ & K & \\ g_j \swarrow & \downarrow g' & \searrow g_k \\ & C & \end{array} \quad (2.7b)$$

En otro lenguaje: el cono colímite $(K, \{i_j\})$ es un *objeto inicial* en una categoría de conos bajo \mathcal{F} .

Los objetos $L = \lim \mathcal{F}$ y $K = \operatorname{colim} \mathcal{F}$ (si existen) poseen **propiedades universales** asociadas con el diagrama \mathcal{F} . Esta “universalidad” es la existencia (y unicidad) de las flechas quebradas en los diagramas (2.7).

Lema 2.47. *El límite $L = \lim \mathcal{F}$ para un diagrama \mathcal{F} en \mathbf{C} , si existe, es único hasta un isomorfismo único.*

Demostración. Si L' es otro objeto límite para \mathcal{F} , existe un único morfismo $f' : L \rightarrow L'$ que hace conmutar (2.7a) con $(L', \{p'_j\})$ en lugar de $(L, \{p_j\})$; y un único morfismo $f'' : L' \rightarrow L$ que hace conmutar el diagrama con los papeles de L y L' invertidos. Con $(B, \{f_j\}) = (L, \{p_j\})$, el morfismo apropiado $L \rightarrow L$ es 1_L , así que $f'' f' = 1_L$, por unicidad; y de modo similar se obtiene $f' f'' = 1_{L'}$.

Entonces f' es un isomorfismo, así que L y L' son objetos isomorfos en \mathbf{C} . Por su construcción, este f' es único. \square

Escolio 2.48. *El colímite $K = \operatorname{colim} \mathcal{F}$ para un diagrama \mathcal{F} en \mathbf{C} , si existe, es único hasta un isomorfismo único.* \square

► Después de esta discusión general, es hora de ver ejemplos de límites y colímites. Se verá que este par de conceptos cubre todas las “construcciones universales” conocidas.

Definición 2.49. Un **producto** de dos objetos A_1 y A_2 en una categoría \mathbf{C} es un límite para el diagrama $\{A_1, A_2\}$, donde \mathbf{J} es la categoría discreta $\bullet \bullet$ (dos objetos sin morfismos entre ellos). De forma más precisa, se puede tomar $\mathbf{J} = \{1, 2\}$ y $\mathcal{F}(1) := A_1$, $\mathcal{F}(2) = A_2$. Un cono sobre \mathcal{F} es un diagrama con dos morfismos $f_1 : B \rightarrow A_1$ y $f_2 : B \rightarrow A_2$. Un objeto $A = \lim \mathcal{F}$ viene acompañado de morfismos $p_1 : A \rightarrow A_1$ y $p_2 : A \rightarrow A_2$ (las **proyecciones** del producto) y para cada B , un morfismo único $f' : B \rightarrow A$, que hacen conmutar este diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 & B & \\
 f_1 \swarrow & \downarrow f' & \searrow f_2 \\
 & A & \\
 p_1 \swarrow & & \searrow p_2 \\
 A_1 & & A_2
 \end{array} \tag{2.8a}$$

Más generalmente, sea J un *conjunto índice* cualquiera y sea \mathbf{J} la categoría discreta con $\operatorname{Ob}(\mathbf{J}) = J$. Un funtor $\mathcal{F} : \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{C}$ no es más que una familia de objetos $A_j \in \mathbf{C}$, indicados por J . El *producto* de esos objetos (si existe) es un objeto $A = \prod_{j \in J} A_j$ junto con morfismos $p_j : A \rightarrow A_j$ que hace conmutar todos los diagramas de tipo (2.8a). \diamond

Ejemplo 2.50. El producto de dos conjuntos $X_1, X_2 \in \text{Set}$ es el *producto cartesiano* $X_1 \times X_2$. Las proyecciones son $p_1(x_1, x_2) := x_1$, $p_2(x_1, x_2) := x_2$. Dadas dos funciones $f_1: Y \rightarrow X_1$, $f_2: Y \rightarrow X_2$, se define $f': Y \rightarrow X_1 \times X_2$ por $f'(y) := (f_1(y), f_2(y))$, obligatoriamente.

En Grp , el *producto directo* $G_1 \times G_2$ es el producto cartesiano dotado de la ley de grupo conocida; las proyecciones p_1 y p_2 son homomorfismos de grupos.

En Top , el producto de dos espacios topológicos X_1, X_2 es el producto cartesiano $X_1 \times X_2$, dotado con la topología más débil tal que las proyecciones p_1, p_2 sean continuas.

En $R\text{-Mod}$, el producto de R -módulos A y B es la *suma directa* $A \oplus B$ de la Definición 1.11, junto con las proyecciones $p_1: A \oplus B \rightarrow A$, $p_2: A \oplus B \rightarrow B$. De igual manera se define la suma directa de una cantidad finita de R -módulos.

Si $\{A_j : j \in J\}$ una familia infinita de R -módulos, su *producto directo* $A = \prod_{j \in J} A_j$ de la Definición 1.12, junto con las proyecciones $p_k: A \rightarrow A_k$, es un producto en el sentido de la Definición 2.49. \diamond

El concepto dual a un producto es un *coproducto*,¹³ al pasar a la categoría opuesta \mathcal{C}° , revirtiendo todas las flechas en los diagramas. (De modo similar, cualquier instancia de un límite va acompañada de una instancia de colímite, al revertir las flechas.)

Definición 2.51. Un **coproducto** de dos objetos A_1 y A_2 en una categoría \mathcal{C} es un colímite para el diagrama etiquetada por la categoría discreta $\mathbf{J} = \{1, 2\}$. Un cono bajo \mathcal{F} es un diagrama con dos morfismos $g_1: A_1 \rightarrow C$ y $g_2: A_2 \rightarrow C$. Un objeto $A = \text{colim } \mathcal{F}$ viene acompañado de morfismos $i_1: A_1 \rightarrow A$ y $i_2: A_2 \rightarrow A$ (las **inyecciones** del coproducto)¹⁴ y para cada C , un morfismo único $g': A \rightarrow C$, que hacen conmutar este diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 A_1 & & A_2 \\
 & \searrow i_1 & \swarrow i_2 \\
 & A & \\
 & \vdots g' & \\
 & C &
 \end{array}
 \quad (2.8b)$$

Sea J un conjunto índice cualquiera y sea \mathbf{J} la categoría discreta con $\text{Ob}(\mathbf{J}) = J$. El *coproducto* de una familia $\{A_j \in \mathcal{C} : j \in J\}$ (si existe) es un objeto $A = \coprod_{j \in J} A_j$ junto con morfismos $i_j: A_j \rightarrow A$ que hace conmutar todos los diagramas de tipo (2.8b). \diamond

¹³El término *coproducto* tiene una segunda acepción. En la teoría de las álgebras de Hopf, se encuentran dos estructuras llamadas “producto” y “coproducto”, entre otras. Para aliviar la confusión terminológica, algunos autores prefieren llamarlas *multiplicación* y *comultiplicación*, reservando el término “coproducto” para el concepto categórica de la Definición 2.51.

¹⁴Pese a la terminología, no es automática que estas “inyecciones” sean monomorfismos.

Ejemplo 2.52. El coproducto de dos conjuntos $X_1, X_2 \in \mathbf{Set}$ es la *unión disjunta* $X_1 \uplus X_2$. [Se identifican $X_1 \leftrightarrow X_1 \times \{1\}$ y $X_2 \leftrightarrow X_2 \times \{2\}$ y se define $X_1 \uplus X_2 := (X_1 \times \{1\}) \cup (X_2 \times \{2\})$; en el caso $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, hay una biyección $X_1 \uplus X_2 \leftrightarrow X_1 \cup X_2$.] Las inyecciones son $i_1(x_1) := (x_1, 1)$, $i_2(x_2) := (x_2, 2)$. Dadas dos funciones $g_1: X_1 \rightarrow Z$, $g_2: X_2 \rightarrow Z$, se define $g': X_1 \uplus X_2 \rightarrow Z$ por $g'(x_1, 1) := g_1(x_1)$, $g'(x_2, 2) := g_2(x_2)$, obligatoriamente.

En $R\text{-Mod}$, el coproducto de R -módulos A y B es la suma directa $A \oplus B$, junto con las inyecciones $i_1: A \rightarrow A \oplus B$, $i_2: B \rightarrow A \oplus B$. En esta categoría, el producto y el coproducto de una cantidad finita de R -módulos coinciden.

Si $\{A_j : j \in J\}$ una familia de R -módulos, su coproducto es la *suma directa* $A = \bigoplus_{j \in J} A_j$ de la Definición 1.12, junto con las inyecciones $i_k: A_k \rightarrow A$. Esta suma directa es un R -submódulo del producto directo $\prod_{j \in J} A_j$, pero ellos no coinciden si J es infinito. \diamond

Definición 2.53. Sea \mathbf{J} la categoría pequeña $\bullet \rightrightarrows \bullet$ (dos objetos con dos morfismos “paralelos” entre ellos); esta categoría pequeña no es un poset. Un diagrama $\mathcal{F}: \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{C}$ es un par de morfismos paralelos $f, g: A \rightrightarrows B$ en \mathbf{C} . Un cono sobre \mathcal{F} es un diagrama de la forma

$$C \xrightarrow{h} A \xrightleftharpoons[g]{f} B \quad (2.9a)$$

dado por un morfismo $h: C \rightarrow A$ tal que $fh = gh$. Un cono bajo \mathcal{F} es otro diagrama

$$A \xrightleftharpoons[g]{f} B \xrightarrow{p} D \quad (2.9b)$$

dado por un morfismo $p: B \rightarrow D$ tal que $pf = pg$.

Un **igualador** para f y g es un par (K, k) , donde $k: K \rightarrow A$ es un monomorfismo, que es universal para el diagrama (2.9a); es decir, $fk = gk$ y cada par (C, h) con $fh = gh$ conlleva un morfismo único $h': C \rightarrow K$ que hace conmutar el diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{h} & A \xrightleftharpoons[g]{f} B \\ \downarrow h' & \nearrow k & \\ K & & \end{array} \quad (2.10a)$$

Un **coigualador** para f y g es un par (Q, q) , donde $q: B \rightarrow Q$ es un epimorfismo, que es universal para el diagrama (2.9b); es decir, $qf = qg$ y cada par (D, p) con $pf = pg$ conlleva un morfismo único $p': Q \rightarrow D$ que hace conmutar el diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccc} A \xrightleftharpoons[g]{f} B & \begin{array}{l} \xrightarrow{q} \\ \searrow p \end{array} & \begin{array}{c} Q \\ \downarrow p' \\ D \end{array} \\ & & \end{array} \quad (2.10b)$$

Se debe notar que $K = \lim \mathcal{F}$ y $Q = \operatorname{colim} \mathcal{F}$ en (2.10a) y (2.10b) respectivamente. \diamond

Definición 2.54. Si \mathbf{J} es el poset $\bullet \rightarrow \bullet \leftarrow \bullet$ considérese un diagrama $A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$. Un cono sobre este diagrama es un cuadrado conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{k} & B \\ h \downarrow & & \downarrow g \\ A & \xrightarrow{f} & C \end{array}$$

tal que $fh = gk$. La propiedad universal para tales cuadrados, con $P := \lim \mathcal{F}$ (si existe), es un cuadrado conmutativo llamado **pullback** de $A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$, así:

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{q} & B \\ p \downarrow \lrcorner & & \downarrow g \\ A & \xrightarrow{f} & C \end{array} \quad (2.11)$$

donde $fp = gq$. La decoración \lrcorner señala su propiedad universal. Explícitamente, esta propiedad es la existencia de un morfismo único $l': D \rightarrow P$ que hace conmutar el siguiente diagrama, esto es, $pl' = h$ y $ql' = k$:

$$\begin{array}{ccccc} D & & & & \\ & \searrow l' & & \searrow k & \\ & & P & \xrightarrow{q} & B \\ & & p \downarrow & & \downarrow g \\ & & A & \xrightarrow{f} & C \end{array}$$

◇

Definición 2.55. Si \mathbf{J} es el poset $\bullet \leftarrow \bullet \rightarrow \bullet$ considérese un diagrama $B \xleftarrow{f} A \xrightarrow{g} C$. Los dos cuadrados conmutativos siguientes:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ g \downarrow & & \downarrow h \\ C & \xrightarrow{k} & D \end{array} \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ g \downarrow & & \downarrow p \\ C & \xrightarrow{q} & Q \end{array} \quad (2.12)$$

son conos bajo ese diagrama. La conmutatividad indica que $hf = kg$ y $pf = qg$. El segundo diagrama tiene la propiedad universal para tales cuadrados, señalada con la decoración \ulcorner con $Q := \operatorname{colim} \mathcal{F}$ (si existe) y llamado **pushout** de $B \xleftarrow{f} A \xrightarrow{g} C$, si siempre existe un morfismo único $l': Q \rightarrow D$ tal que $l'p = h$, $l'q = k$. (Se deja al lector dibujar el diagrama conmutativo correspondiente.) ◇

Ejemplo 2.56. En la categoría \mathbf{Set} , dadas dos funciones $f: X \rightarrow Z$ y $g: Y \rightarrow Z$, el pullback de $X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{g} Y$ está dado por el conjunto

$$X \times_Z Y := \{(x, y) \in X \times Y : f(x) = g(y)\},$$

llamado el **producto fibrado** de X y Y sobre Z . Las dos proyecciones $p: X \times_Z Y \rightarrow X$, $q: X \times_Z Y \rightarrow Y$ son las restricciones respectivas de las proyecciones p_1, p_2 del producto cartesiano $X \times Y$.

En particular, si $X \subseteq Z$ y $Y \subseteq Z$ y si f, g son las inclusiones respectivas, este producto fibrado es $X \cap Y$. Fíjese que $X \cap Y$ generalmente no es parte de $X \times Y$, pero $X \times_Z Y = \{(z, z) : z \in X \cap Y\}$ y hay una biyección única (y obvia) $X \cap Y \leftrightarrow X \times_Z Y$ que respeta las inclusiones apropiadas. De hecho, como cualquier límite categórica, el pullback de un diagrama $X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{g} Y$ solo está determinado hasta una biyección única. \diamond

¶ La terminología en español no está bien establecida aún. Las palabras “igualador” y “coigualador” son traducciones de los vocablos ingleses *equalizer* y *coequalizer*. Los términos “pullback” y “pushout” se toman directamente del inglés, *faute de mieux*. (A veces se lee el término malsonante “push-forward” en vez de pushout.) Unas frases ya en desuso son “cuadrados cartesianos” para pullbacks y “cuadrados cocartesianos” para pushouts.

El “producto fibrado” tiene su origen en la topología algebraica; hoy en día es aplicable a cualquier pullback de conjuntos. ¶

Ejemplo 2.57. En la categoría $\mathbb{F}\text{-Alg}$ de álgebras sobre un cuerpo \mathbb{F} , una \mathbb{F} -álgebra A tiene una **morfismo unidad** $\eta: \mathbb{F} \rightarrow A$ dado por $\lambda \mapsto \lambda 1$ (aquí 1 es el elemento identidad de A). Dadas dos \mathbb{F} -álgebras A y B , el *pushout* de las dos unidades $\eta_A: \mathbb{F} \rightarrow A$ y $\eta_B: \mathbb{F} \rightarrow B$ es el *producto tensorial* $A \otimes_{\mathbb{F}} B$ (véase la Definición 1.14):

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F} & \xrightarrow{\eta_A} & A \\ \eta_B \downarrow & \lrcorner & \downarrow i_A \\ B & \xrightarrow{i_B} & A \otimes_{\mathbb{F}} B \end{array}$$

donde $i_A(a) := a \otimes 1$, $i_B(b) := 1 \otimes b$ son las inyecciones naturales.¹⁵ \diamond

Nota: $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C} \simeq \mathbb{C}$ como \mathbb{C} -álgebras, pero $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^4$ como \mathbb{R} -álgebras.

► En la discusión anterior, con diversos ejemplos de límites y colímites, quedó pendiente la posible *existencia* de límites y colímites en una categoría dada. Si el conjunto $\mathbf{Ob}(\mathbf{J})$ es finito, se dice que $\mathcal{F}: \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{C}$ es un *diagrama finito* y su límite, si existe, es un *límite finito*.

¹⁵Esta definición se generaliza al caso de álgebras sobre un anillo conmutativo R : si A y B son R -álgebras, entonces $A \otimes_R B$ es otra.

Dícese que una categoría \mathcal{C} es *completa* si los límites existen para todo diagrama $\mathcal{F}: \mathbf{J} \rightarrow \mathcal{C}$ (con \mathbf{J} una categoría pequeña). Resulta que todo límite puede fabricarse con productos e igualadores; por ende, \mathcal{C} es completa si posee un producto de cada familia de objetos e igualadores de cada par de morfismos paralelos.¹⁶ Si \mathcal{C} posee igualadores y productos de cada par de objetos, se puede fabricar todo límite finito aunque la categoría no sea completa: ejemplos son $\text{vect-}\mathbb{F}$ (espacios \mathbb{F} -vectoriales de dimensión finita) y también set (conjuntos finitos) y $R\text{-mod}$ (R -módulos finitamente generados).

Si todos los colímites existen en \mathcal{C} , se dice que \mathcal{C} es *cocompleta*: basta que posea todos sus coproductos y coigualadores. Las categorías Set y $R\text{-Mod}$ son completas y cocompletas.

2.4 Categorías abelianas

Para abordar temas del álgebra homológica, la teoría general de categorías y funtores es útil pero no indispensable. Sin embargo, para desarrollar la homología algebraica, tiene particular importancia aquellas categorías que poseen las propiedades esenciales de R -módulos: las llamadas categorías *abelianas*. El nombre no refleja una intuición profunda de Niels Abel, sino la circunstancia de que el ejemplar más sencillo es Ab , la categoría de los grupos abelianos. Su introducción se remonta a 1955, en un artículo de Buchsbaum (quien las llamó “categorías exactas”) y un curso de Grothendieck en la Universidad de Kansas, publicado en 1957, que usa la terminología actual.¹⁷

Definición 2.58. Una **categoría aditiva** es una categoría \mathcal{C} en la cual:

- (a) Cada $\mathcal{C}(A, B)$ es un grupo abeliano en donde la suma y composición de morfismos es distributiva; es decir, toda vez que $f \in \mathcal{C}(A, B)$, $g_1, g_2 \in \mathcal{C}(B, C)$, $h \in \mathcal{C}(C, D)$, vale $h(g_1 + g_2)f = hg_1f + hg_2f$ en $\mathcal{C}(A, D)$.
- (b) \mathcal{C} posee un objeto cero 0 , tal que $\mathcal{C}(0, 0) = \{0\}$.
- (c) Todo par de objetos $A, B \in \mathcal{C}$ posee un *suma directa* $A \oplus B$, dotado de cuatro morfismos:

$$A \begin{array}{c} \xrightarrow{j_1} \\ \xleftarrow{p_1} \end{array} A \oplus B \begin{array}{c} \xleftarrow{j_2} \\ \xrightarrow{p_2} \end{array} B$$

que cumplen las relaciones (1.3):

$$p_1 j_1 = 1_A, \quad p_1 j_2 = 0, \quad p_2 j_1 = 0, \quad p_2 j_2 = 1_B, \quad j_1 p_1 + j_2 p_2 = 1_{A \oplus B}. \quad \diamond$$

¹⁶Para la demostración, véase el Teorema V.2.1 del libro de categorías de MacLane.

¹⁷Los artículos referidos son: David A. Buchsbaum, “Exact categories and duality”, *Transactions of the American Mathematical Society* **80** (1955), 1–34; y Alexandre Grothendieck, “Sur quelques points d’algèbre homologique”, *Tôhoku Mathematical Journal* **9** (1957), 119–221.

En una categoría aditiva, ningún $\mathcal{C}(A, B)$ es vacío porque contiene un morfismo 0 (se escriben los grupos abelianos con notación aditiva). En la presencia de la condición (a), la condición $\mathcal{C}(0, 0) = \{0\}$ conlleva $\mathcal{C}(A, 0) = \{0\}$ y $\mathcal{C}(0, B) = \{0\}$ para todo $A, B \in \mathcal{C}$, así que 0 es un objeto cero en el sentido de la Definición 2.42.

La condición (c) implica que estas dos diagramas son un pullback y un pushout, respectivamente:¹⁸

$$\begin{array}{ccc} A \oplus B & \xrightarrow{p_2} & B \\ p_1 \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ A & \longrightarrow & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & B \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow i_2 \\ A & \xrightarrow{i_1} & A \oplus B \end{array}$$

Por lo tanto, la suma directa es a la vez un producto y un coproducto de A y B ; y la suma directa es única hasta un isomorfismo único.

Definición 2.59. Sea $f: A \rightarrow B$ un morfismo en una categoría aditiva \mathcal{C} . El **núcleo** de f es el igualador (si existe) de $f, 0: A \rightrightarrows B$. El **conúcleo** de f es el coigualador (si existe) de $f, 0: A \rightrightarrows B$. Los objetos correspondientes son únicos hasta isomorfismos únicos. El núcleo se denota por $K = \ker f$ y el conúcleo por $Q = \operatorname{coker} f$; están acompañados, respectivamente, por un monomorfismo $k: K \rightarrow A$ tal que $fk = 0$; y un epimorfismo $q: B \rightarrow Q$ tal que $qf = 0$.

Como los igualadores y coigualadores solo están definidos hasta isomorfismos únicos, se puede decir que *el par (K, k) es un núcleo para f y que el par (Q, q) es un conúcleo para f .*

Las propiedades universales de núcleo y conúcleo se derivan de los diagramas (2.10):

$$\begin{array}{ccc} C & & \\ \downarrow h' & \searrow h & \\ K & \xrightarrow{k} & A \xrightarrow{f} B \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} A \xrightarrow{f} B & & \\ \nearrow q & \searrow p & \\ Q & \xrightarrow{p'} & D \end{array}$$

En otras palabras: dado $h: C \rightarrow A$ tal que $fh = 0$, existe $h': C \rightarrow K$ tal que $kh' = h$; y dado $p: B \rightarrow D$ tal que $pf = 0$, existe $p': Q \rightarrow D$ tal que $p'q = p$. \diamond

Las categorías \mathbf{Ab} , $R\text{-Mod}$ y $R\text{-Comp}$ son aditivas, como se ve fácilmente. El objeto cero en $R\text{-Comp}$ es el complejo trivial donde $C_n = 0$ para todo n . Sin embargo, estas categorías tienen una propiedad suplementaria que garantiza la existencia de núcleos y conúcleos con una importante condición de compatibilidad.

Es oportuno redefinir los conceptos de **imagen** y **coimagen** introducidos en la Definición 1.8 en términos de elementos de R -módulos. Si $f \in \mathcal{C}(A, B)$ en una categoría aditiva \mathcal{C} que posee núcleos y conúcleos de todos sus morfismos, se define

$$\operatorname{coim} f := \operatorname{coker}(\ker f) \equiv \operatorname{coker} k, \quad \operatorname{im} f := \ker(\operatorname{coker} f) \equiv \ker q. \quad (2.13)$$

¹⁸Por tradición, se omite nombrar los morfismos nulos con dominio o codominio 0 .

Ampliando el Escolio 1.9, se puede construir un morfismo canónico $\hat{f}: \text{coim } f \rightarrow \text{im } f$ que hace conmutar el diagrama de ese Escolio: $f = j \hat{f} p$. Sin embargo, no hay garantía de que \hat{f} sea un monomorfismo ni un epimorfismo.

El morfismo canónico \hat{f} se construye como sigue. Un morfismo $f \in \mathcal{C}(A, B)$ que posee un núcleo $K \xrightarrow{k} A$ y un conúcleo $B \xrightarrow{q} Q$ da lugar a un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} K & \xrightarrow{k} & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{q} & Q \\ & & \downarrow p & \searrow g & \uparrow j & & \\ & & C & \xrightarrow{\hat{f}} & D & & \end{array} \quad (2.14)$$

donde $C = \text{coim } f := \text{coker } k$, junto con un epimorfismo $p: A \rightarrow C$; y $D = \text{im } f := \text{ker } q$, junto con un monomorfismo $j: D \rightarrow B$.

Como $qf = 0$, la propiedad universal del núcleo D de q implica que existe un único morfismo $g: A \rightarrow D$ tal que $fg = f$. Como $fgk = fk = 0$ y por ende $gk = 0$ ya que j es mónico, la propiedad universal del conúcleo C de k implica que existe un único morfismo $\hat{f}: C \rightarrow D$ tal que $\hat{f}p = g$.

Definición 2.60. Una **categoría abeliana** es una categoría aditiva \mathcal{C} que además cumple:

(d) Cada $f \in \mathcal{C}(A, B)$ posee un núcleo y un conúcleo.

(e) El morfismo canónico $\hat{f}: \text{coim } f \rightarrow \text{im } f$ es un isomorfismo. \diamond

En categorías como Ab o $R\text{-Mod}$, donde los objetos son conjuntos, se puede definir el núcleo y el conúcleo como ciertos conjuntos específicos (véase la Definición 1.8). Sin embargo, en categorías generales, los objetos núcleo y conúcleo solo se definen hasta isomorfismo. Cuando $\hat{f}: C \rightarrow D$ es un isomorfismo (es decir, un morfismo invertible) en el diagrama (2.14), entonces tanto (D, j) como $(C, j\hat{f})$ son núcleos para $q: B \rightarrow Q$; y tanto (C, p) como $(D, \hat{f}p)$ son conúcleos para $k: K \rightarrow A$. Entonces las propiedades (d) y (e) de una categoría abeliana pueden reformularse como sigue:

(d') Para cada $f \in \mathcal{C}(A, B)$, hay una sucesión de morfismos donde $f = jp$:

$$\begin{array}{ccccc} K & \xrightarrow{k} & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{q} & Q \\ & & \searrow p & & \nearrow j & & \\ & & E & & & & \end{array} \quad (2.15)$$

con j mónico y p épico, (K, k) es un núcleo para f y (Q, q) es un conúcleo para f .

(e') (E, p) es un conúcleo para k y (E, j) es un núcleo para q .

En este esquema, se identifican la imagen y la coimagen: $E = \text{coim } f = \text{im } f$.

Escolio 2.61. En una categoría abeliana \mathcal{C} , un morfismo f es mónico si y solo si $\ker f = 0$; f es épico si y solo si $\operatorname{coker} f = 0$.

Un morfismo f de \mathcal{C} es un isomorfismo si y solo si f es mónico y épico a la vez. \square

Escolio 2.62. Si \mathcal{C} es una categoría abeliana, la categoría opuesta \mathcal{C}° también es abeliana. \square

Definición 2.63. En una categoría abeliana \mathcal{C} , sean $f \in \mathcal{C}(A, B)$ y $g \in \mathcal{C}(B, C)$ un par de morfismos que cumplen $gf = 0$. Considérese el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\ & \searrow p & \nearrow j & \nwarrow i & \\ & & E & \xrightarrow{h} & L \end{array}$$

donde $E = \operatorname{im} f$ y $L = \ker g$. Nótese que $gjp = gf = 0$; como p es épico, sigue $gj = 0$, luego hay un morfismo único $h: E \rightarrow L$ tal que $ih = j$.

El diagrama $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ es **exacto en B** si h es un isomorfismo. Entonces tanto (E, j) como (L, i) son núcleos para $g: B \rightarrow C$. Sin perder generalidad, entonces, se puede tomar $L = E$ e $i = j$, afirmando que la sucesión de la primera fila es exacta en B si $\operatorname{im} f = \ker g$. (Esto generaliza la Definición 1.16.) \diamond

Lema 2.64. En una categoría abeliana \mathcal{C} :

- (a) Una sucesión $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B$ es exacta si y solo si f es un monomorfismo.
- (b) Una sucesión $B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ es exacta si y solo si g es un epimorfismo.
- (c) Una sucesión $0 \rightarrow A \xrightarrow{h} B \rightarrow 0$ es exacta si y solo si h es un isomorfismo.
- (d) La sucesión $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ es exacta si y solo si $gf = 0$ y (A, f) es un núcleo para g .
- (e) La sucesión $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ es exacta si y solo si $gf = 0$ y (C, g) es un conúcleo para f .

Demostración. Las partes (a), (b), (c) siguen del Escolio 2.61.

Ad (d): Si $gf = 0$ y (A, f) es un núcleo para g , entonces f es mónico y por ende la sucesión dada es exacta en A . Además, en la factorización canónica (2.15) de f , el factor $p: A \rightarrow \operatorname{im} f$ es un isomorfismo porque f es mónico. Luego $(\operatorname{im} f, j)$ es un núcleo para g , de manera que $h: \operatorname{im} f \rightarrow \ker g$ es un isomorfismo y la sucesión es exacta en B .

Inversamente, si la sucesión dada es exacta en A y en B , entonces f es un monomorfismo, $gf = 0$, y $(\operatorname{im} f, j)$ es un núcleo para g . Si $r: D \rightarrow B$ es un morfismo tal que $gr = 0$, entonces

$r = js$ con $s: D \rightarrow \text{im } f$. En la factorización canónica $f = jp$, p es un isomorfismo porque f es mónico, así que $r = fp^{-1}s$. Se ha construido un morfismo $t = p^{-1}s: D \rightarrow A$ tal que $r = ft$ a partir de la hipótesis $gr = 0$; esto muestra que (A, f) es un núcleo para g .

Ad (e): Aplíquese la parte (d) a la categoría dual C° . \square

Las categorías abelianas forman el contexto natural para el álgebra homológica, porque las propiedades (d) y (e) garantizan que la manipulación de diagramas en $R\text{-Mod}$ sigue aplicable en otras categorías abelianas. Resulta que el *lema de cinco* (Lema 1.19) y el *lema de la culebra* (Proposición 1.22) son válidos en cualquier categoría abeliana.¹⁹

Las categoría $R\text{-Mod}$ es abeliana: en particular, $\text{Ab} = \mathbb{Z}\text{-Mod}$ es una categoría abeliana. La categoría $\text{Mod-}R$ de R -módulos derechos es abeliana, como también la categoría $R\text{-Bimod-}S$ de R - S -bimódulos para dos anillos dados R y S .

En la geometría algebraica, se encuentran los conceptos de un *prehaz* y de un *haz* sobre un espacio topológico X . Se definen morfismos entre prehaces o haces, de modo que estas forman categorías. Los prehaces o haces sobre X con valores en grupos abelianos forman categorías abelianas. Este ejemplo fue la motivación principal para el enfoque categórico desarrollado por Grothendieck.

Definición 2.65. Si C y D son categorías aditivas, $\mathcal{F}: C \rightarrow D$ es un **functor aditivo** si cada $h \mapsto \mathcal{F}h: C(A, B) \rightarrow D(\mathcal{F}A, \mathcal{F}B)$ es un homomorfismo de grupos abelianos. \diamond

Definición 2.66. Sea $\mathcal{F}: C \rightarrow D$ un functor aditivo entre dos categorías abelianas. Una **sucesión exacta corta (SEC)** en C ,

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0, \quad (1.5)$$

reúne dos morfismos de C con f mónico, g épico, e $\text{im } f = \ker g$. Dícese que \mathcal{F} es:

- (a) **semiexacto** si, para cada SEC (1.5) en C , la sucesión $\mathcal{F}A \xrightarrow{\mathcal{F}f} \mathcal{F}B \xrightarrow{\mathcal{F}g} \mathcal{F}C$ es exacta en D ;
- (b) **exacto a la izquierda** si, para cada SEC (1.5), $0 \longrightarrow \mathcal{F}A \xrightarrow{\mathcal{F}f} \mathcal{F}B \xrightarrow{\mathcal{F}g} \mathcal{F}C$ es exacta en D ;
- (c) **exacto a la derecha** si, para cada SEC (1.5), $\mathcal{F}A \xrightarrow{\mathcal{F}f} \mathcal{F}B \xrightarrow{\mathcal{F}g} \mathcal{F}C \longrightarrow 0$ es exacta en D ;
- (d) **exacto** si, para cada SEC (1.5), $0 \longrightarrow \mathcal{F}A \xrightarrow{\mathcal{F}f} \mathcal{F}B \xrightarrow{\mathcal{F}g} \mathcal{F}C \longrightarrow 0$ es una SEC en D . \diamond

¹⁹Las *demostraciones* de estos dos lemas, dados en la sección 1.2 para R -módulos deben modificarse, porque los objetos no siempre serán conjuntos. Es cuestión de reformular esas demostraciones en términos de morfismos exclusivamente: véase la sección II.5 del libro de Gelfand y Manin. Alternativamente, se puede apelar a un teorema de Freyd y Mitchell (1965) que dice que cualquier categoría abeliana puede ser encajada como subcategoría en algún $R\text{-Mod}$.

Lema 2.67. Sea \mathcal{C} una categoría abeliana y sean $D, E \in \text{Ob}(\mathcal{C})$. Los funtores representables $\mathcal{C}(D, -): \mathcal{C} \rightarrow \text{Ab}$ y $\mathcal{C}(-, E): \mathcal{C}^\circ \rightarrow \text{Ab}$ son exactos a la izquierda.

En particular, en la categoría $R\text{-Mod}$, los funtores $\text{Hom}_R(D, -)$ y $\text{Hom}_R(-, E)$ son exactos a la izquierda.

Demostración. Al aplicar el funtor covariante $\mathcal{C}(D, -)$ a la SEC (1.5), se obtiene la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}(D, A) \xrightarrow{f_*} \mathcal{C}(D, B) \xrightarrow{g_*} \mathcal{C}(D, C).$$

Se debe mostrar que f_* es mónico y que $\text{im } f_* = \ker g_*$.

Si $h \in \mathcal{C}(D, A)$, entonces $f_*(h) = fh = 0$ implica $h = 0$ porque f es mónico en \mathcal{C} ; luego f_* es mónico en Ab .

Fíjese que $g_*f_* = (gf)_* = 0_* = 0$ por funtorialidad. Por otro lado, si $k \in \mathcal{C}(D, B)$ cumple $g_*(k) = gk = 0$, entonces hay un morfismo $l: D \rightarrow \ker g = \text{im } f$ tal que $k = jl$ donde $j: \ker g \rightarrow B$ es el monomorfismo canónico. Como f es mónico, el morfismo canónico $p: A \rightarrow \text{im } f$ en (2.15) tal que $f = jp$ es un isomorfismo, así que $k = fp^{-1}l$, lo cual implica que $k \in \text{im } f_*$.

[[En el caso de $R\text{-Mod}$, se puede argüir que $gk = 0$ implica $k(D) \subseteq \ker g = f(A)$, así que $k = fr$ para algún $r: D \rightarrow A$ ya que f es inyectivo.]]

Para el otro funtor $\mathcal{C}(-, E)$, basta notar que la categoría \mathcal{C}° es también abeliana. \square

2.5 Funtores adjuntos

Con frecuencia se encuentran pares de funciones entre dos categorías (en direcciones opuestas) que guardan una relación, codificada en la definición siguiente.

Definición 2.68. Un par de funtores $\mathcal{F}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ y $\mathcal{G}: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ (abreviado con el simbolismo $\mathcal{F}: \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D}: \mathcal{G}$) se llaman **adjuntos** si para todo $A \in \mathcal{C}$ y $B \in \mathcal{D}$, existe un isomorfismo²⁰

$$\alpha_{A,B}: \mathcal{D}(\mathcal{F}A, B) \xrightarrow{\cong} \mathcal{C}(A, \mathcal{G}B) \quad (2.16)$$

que es *natural* en A y en B . Dícese que \mathcal{F} es un **adjunto izquierdo** de \mathcal{G} y que \mathcal{G} es un **adjunto derecho** de \mathcal{F} . Se escribe $\mathcal{F} \dashv \mathcal{G}$, dejando implícita la adjunción α . \diamond

Ejemplo 2.69. El ejemplo mejor conocido de una adjunción es $\mathcal{V}: \text{Set} \rightleftarrows \text{Vect-}\mathbb{F}: \mathcal{U}$, donde \mathcal{U} es el *functor olvidadizo* (que asocia a cada espacio \mathbb{F} -vectorial su conjunto de vectores) y \mathcal{V} es el *functor libre* que a cada conjunto X asocia el espacio \mathbb{F} -vectorial con base X . Aquí $\mathcal{V}X$ es la totalidad de combinaciones lineales formales²¹ de elementos de X . Cada función

²⁰En general, $\alpha_{A,B}$ es una biyección en Set . Si \mathcal{C} y \mathcal{D} son categorías aditivas, $\alpha_{A,B}$ es un isomorfismo en Ab .

²¹Cabe recordar que una combinación lineal es una suma *finita* de múltiplos $\lambda_x x$ de elementos $x \in X$.

$f: X \rightarrow \mathcal{U}W$ se extiende, de manera única, a una aplicación lineal $\tilde{f}: \mathcal{V}X \rightarrow W$; a la inversa, la restricción a X lleva cada aplicación lineal $g: \mathcal{V}X \rightarrow W$ a la función $g|_X: X \rightarrow \mathcal{U}W$. Luego $\alpha_{X,W}: g \mapsto g|_X$ es una biyección entre $\text{Vect-}\mathbb{F}(\mathcal{V}X, W)$ y $\text{Set}(X, \mathcal{U}W)$. Luego $\mathcal{V} \dashv \mathcal{U}$. \diamond

La naturalidad de α en ambas variables es la conmutatividad de todos los diagramas:

$$\begin{array}{ccc} D(\mathcal{F}A, B) & \xrightarrow{\alpha_{A,B}} & C(A, \mathcal{G}B) \\ (\mathcal{F}h)^* \downarrow & & \downarrow h^* \\ D(\mathcal{F}A', B) & \xrightarrow{\alpha_{A',B}} & C(A', \mathcal{G}B) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} D(\mathcal{F}A, B) & \xrightarrow{\alpha_{A,B}} & C(A, \mathcal{G}B) \\ k_* \downarrow & & \downarrow (\mathcal{G}k)_* \\ D(\mathcal{F}A, B') & \xrightarrow{\alpha_{A,B'}} & C(A, \mathcal{G}B') \end{array} \quad (2.17)$$

una para cada $h: A' \rightarrow A$ en C y cada $k: B \rightarrow B'$ en D ; las flechas horizontales son biyectivas. En forma más abreviada, hay isomorfismos naturales $\alpha_{A,-}: D(\mathcal{F}A, -) \Rightarrow C(A, \mathcal{G}-)$ y $\alpha_{-,B}: D(\mathcal{F}-, B) \Rightarrow C(-, \mathcal{G}B)$. Alternativamente, hay un isomorfismo natural

$$\alpha: D(\mathcal{F}-, -) \Rightarrow C(-, \mathcal{G}-) \quad \text{entre dos bifuntores} \quad C^\circ \times D \rightarrow \text{Set}.$$

Si se toma $g \in D(\mathcal{F}A, B)$, entonces (2.17) muestra que en $C(A', \mathcal{G}B')$:

$$\alpha_{A',B'}(k \mathcal{G} \mathcal{F}h) = \alpha_{A',B'}(\mathcal{F}h)^*(kg) = h^* \alpha_{A,B'} k_*(g) = h^*(\mathcal{G}k)_* \alpha_{A,B}(g) = \mathcal{G}k \alpha_{A,B}(g) h. \quad (2.18)$$

Ejemplo 2.70. Sean J y K dos posets, $\mathcal{F}: J \rightleftarrows K: \mathcal{G}$ un par de funtores dados por funciones $F: J \rightleftarrows K: G$ entre los conjuntos objetos. Si $a \in J$, $b \in K$, fíjese que $K(\mathcal{F}a, b)$ es un singlete o vacío según sea $F(a) \leq b$ o no. Entonces hay una adjunción $\mathcal{F} \dashv \mathcal{G}$ cuando se cumple

$$F(a) \leq b \iff a \leq G(b).$$

Si el cuerpo \mathbb{K} es una extensión finita del cuerpo \mathbb{F} , sea J el poset de los cuerpos intermedios \mathbb{E} con $\mathbb{K} \supseteq \mathbb{E} \supseteq \mathbb{F}$. Sea $\text{Gal}(\mathbb{K} | \mathbb{E})$ el grupo de Galois de \mathbb{K} sobre \mathbb{E} : este es el grupo finito de automorfismos de \mathbb{K} que dejan fijo el subcuerpo \mathbb{E} . Los subgrupos de $G = \text{Gal}(\mathbb{K} | \mathbb{F})$ forman un poset K bajo inclusión. El teorema principal de la teoría de Galois dice (entre otras cosas) que hay una biyección monótona entre estos posets: $\mathbb{E} \supseteq \mathbb{E}'$ si y solo si $\text{Gal}(\mathbb{K} | \mathbb{E}) \leq \text{Gal}(\mathbb{K} | \mathbb{E}')$. Si $H \leq G$ es un subgrupo, \mathbb{K}^H denota el cuerpo fijo de \mathbb{K} bajo los automorfismos en H . El mismo teorema asegura que el funtor $\mathbb{E} \mapsto \text{Gal}(\mathbb{K} | \mathbb{E})$ es un funtor adjunto izquierdo al funtor $H \mapsto \mathbb{K}^H$, porque $\text{Gal}(\mathbb{K} | \mathbb{E}) \leq H$ si y solo si $\mathbb{E} \supseteq \mathbb{K}^H$. \diamond

Definición 2.71. Sea $\mathcal{F}: C \rightleftarrows D: \mathcal{G}$ un par de funtores adjuntos, $\mathcal{F} \dashv \mathcal{G}$. Por el Lema de Yoneda, para cada $A \in C$ la transformación natural $\alpha_{A,-}: D(\mathcal{F}A, -) \Rightarrow C(A, \mathcal{G}-)$ está representada por $\eta_A := \alpha_{A,\mathcal{F}A}(1_{\mathcal{F}A})$, un morfismo en $C(A, \mathcal{G}\mathcal{F}A)$. De igual manera, para cada $B \in D$, el morfismo $\varepsilon_B := \alpha_{\mathcal{G}B,B}^{-1}(1_{\mathcal{G}B})$ en $D(\mathcal{F}\mathcal{G}B, B)$ representa la transformación natural

$\alpha_{-,B}: D(\mathcal{F}-, B) \Rightarrow C(-, \mathcal{G}B)$. Los siguientes diagramas son conmutativos:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\eta_A} & \mathcal{G}\mathcal{F}A \\ h \uparrow & & \uparrow \mathcal{G}\mathcal{F}h \\ A' & \xrightarrow{\eta_{A'}} & \mathcal{G}\mathcal{F}A' \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{F}\mathcal{G}B & \xrightarrow{\varepsilon_B} & B \\ \mathcal{F}\mathcal{G}k \downarrow & & \downarrow k \\ \mathcal{F}\mathcal{G}B' & \xrightarrow{\varepsilon_{B'}} & B' \end{array}$$

para $h: A' \rightarrow A$ en C y $k: B \rightarrow B'$ en D . En efecto, tómese $B' = B = \mathcal{F}A$ y $g = 1_{\mathcal{F}A}$, $k = 1_B$ en (2.18) para obtener $\mathcal{G}\mathcal{F}h \eta_{A'} = \eta_A h$; la segunda relación sigue de modo similar.

Por lo tanto, los η_A y los ε_B son componentes respectivos de dos transformaciones naturales, $\eta: 1_C \Rightarrow \mathcal{G}\mathcal{F}$, llamada la **unidad** de la adjunción; y $\varepsilon: \mathcal{F}\mathcal{G} \Rightarrow 1_D$, la **counidad** de la adjunción. \diamond

Notación. Si $\beta: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ es una transformación natural entre funtores paralelos $\mathcal{F}, \mathcal{G}: C \rightrightarrows D$, y si $\mathcal{H}: D \rightarrow E$ es otro funtor, se define la transformación natural $\mathcal{H}\beta: \mathcal{H}\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{H}\mathcal{G}$ (funtores de C en E) por $(\mathcal{H}\beta)_A := \mathcal{H}(\beta_A): \mathcal{H}\mathcal{F}A \rightarrow \mathcal{H}\mathcal{G}A$. Si \mathcal{K} es otro funtor de cierta categoría en C , se define $\beta\mathcal{K}: \mathcal{F}\mathcal{K} \Rightarrow \mathcal{G}\mathcal{K}$ de modo similar.

Escolio 2.72. La unidad η y la counidad ε de una adjunción $\mathcal{F} \dashv \mathcal{G}$ hacen conmutativos los siguientes diagramas entre funtores:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{\mathcal{F}\eta} & \mathcal{F}\mathcal{G}\mathcal{F} \\ & \searrow 1_{\mathcal{F}} & \downarrow \varepsilon_{\mathcal{F}} \\ & & \mathcal{F} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{G} & \xrightarrow{\eta_{\mathcal{G}}} & \mathcal{G}\mathcal{F}\mathcal{G} \\ & \searrow 1_{\mathcal{G}} & \downarrow \mathcal{G}\varepsilon \\ & & \mathcal{G} \end{array}$$

Inversamente, si $\eta: 1_C \Rightarrow \mathcal{G}\mathcal{F}$ y $\varepsilon: \mathcal{F}\mathcal{G} \Rightarrow 1_D$ son transformaciones que satisfacen $\varepsilon_{\mathcal{F}} \cdot \mathcal{F}\eta = 1_{\mathcal{F}}$ y $\mathcal{G}\varepsilon \cdot \eta_{\mathcal{G}} = 1_{\mathcal{G}}$, entonces $\mathcal{F}: C \rightrightarrows D: \mathcal{G}$ es un par de funtores adjuntos, mediante $\alpha_{A,B}(g) := \mathcal{G}g \circ \eta_A$ para $g \in D(\mathcal{F}A, B)$ y $\alpha_{A,B}^{-1}(f) := \varepsilon_B \circ \mathcal{F}f$ para $f \in C(A, \mathcal{G}B)$. \square

Lema 2.73. Si dos funtores $\mathcal{F}, \mathcal{F}': C \rightrightarrows D$ son adjuntos izquierdos de un funtor $\mathcal{G}: D \rightarrow C$, entonces hay un isomorfismo natural $\theta: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$ que entrelaza las unidades y counidades de las adjunciones: $\mathcal{G}\theta \cdot \eta = \eta': 1_C \Rightarrow \mathcal{G}\mathcal{F}'$ y $\varepsilon' \cdot \theta\mathcal{G} = \varepsilon: \mathcal{F}\mathcal{G} \Rightarrow 1_D$. De esta manera, el adjunto izquierdo de \mathcal{G} , si existe, es esencialmente único.

Demostración. Sean $\eta': 1_C \Rightarrow \mathcal{G}\mathcal{F}'$ y $\varepsilon': \mathcal{F}'\mathcal{G} \Rightarrow 1_D$ la unidad y counidad de la adjunción $\mathcal{F}' \dashv \mathcal{G}$. Al combinar las dos adjunciones, hay un isomorfismo en D :

$$\alpha_{A,B}^{-1} \circ \alpha'_{A,B}: D(\mathcal{F}'A, B) \xrightarrow{\cong} C(A, \mathcal{G}B) \xrightarrow{\cong} D(\mathcal{F}A, B).$$

Para A fijo, esta composición proporciona un isomorfismo natural entre los funtores representables $D(\mathcal{F}'A, -)$ y $D(\mathcal{F}A, -)$. Por el lema de Yoneda, esto corresponde a un isomorfismo $\theta_A: \mathcal{F}'A \rightarrow \mathcal{F}A$ en D , dada por la evaluación en $1_{\mathcal{F}'A}$:

$$\theta_A := \alpha_{A,\mathcal{F}'A}^{-1}(\alpha'_{A,\mathcal{F}'A}(1_{\mathcal{F}'A})) = \alpha_{A,\mathcal{F}'A}^{-1}(\eta'_A) = \varepsilon_{\mathcal{F}'A} \circ \mathcal{F}\eta'_A.$$

Esta receta es natural en A y así define un isomorfismo natural $\theta: \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{F}'$ por la fórmula $\theta := \varepsilon_{\mathcal{F}'} \cdot \mathcal{F}\eta' : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}\mathcal{G}\mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F}'$. Evidentemente, $\theta^{-1} = \varepsilon'_{\mathcal{F}} \cdot \mathcal{F}'\eta : \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F}'\mathcal{G}\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ al cambiar los papeles de \mathcal{F} y \mathcal{F}' .

La naturalidad de $\eta: 1_{\mathcal{C}} \Rightarrow \mathcal{G}\mathcal{F}$ implica que $\mathcal{G}\mathcal{F}\eta' \cdot \eta = \eta\mathcal{G}\mathcal{F}' \cdot \eta'$ como transformaciones naturales $1_{\mathcal{C}} \Rightarrow \mathcal{G}\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G}\mathcal{F}\mathcal{G}\mathcal{F}'$ versus $1_{\mathcal{C}} \Rightarrow \mathcal{G}\mathcal{F}' \Rightarrow \mathcal{G}\mathcal{F}\mathcal{G}\mathcal{F}'$. Luego se calcula que

$$\mathcal{G}\theta \cdot \eta = \mathcal{G}\varepsilon_{\mathcal{F}'} \cdot \mathcal{G}\mathcal{F}\eta' \cdot \eta = \mathcal{G}\varepsilon_{\mathcal{F}'} \cdot \eta\mathcal{G}\mathcal{F}' \cdot \eta' = 1_{\mathcal{G}\mathcal{F}'} \cdot \eta' = 1_{\mathcal{G}\mathcal{F}'} \cdot \eta' = \eta'$$

al usar el Escolio 2.72. La relación $\varepsilon' \cdot \theta\mathcal{G} = \varepsilon$ sigue de manera similar. \square

► En la categoría abeliana de R -módulos (izquierdos o derechos), o más generalmente en R - S -bimódulos, hay un caso importante de funtores adjuntos. Si A es un R -módulo derecho y si B es un R - S -bimódulo, entonces su producto tensorial $A \otimes_R B$ es un S -módulo derecho. (Véase la Definición 1.14.) Ahora $A \mapsto A \otimes_R B$ es un funtor (covariante) de $\text{Mod-}R$ en $\text{Mod-}S$. A cada $f: A \rightarrow A'$ en $\text{Mod-}R$ le corresponde $f_{\#} \equiv f \otimes 1_B : a \otimes b \mapsto f(a) \otimes b$ en $\text{Mod-}S$. El “teorema fundamental de productos tensoriales” es el siguiente.

Proposición 2.74. Sean A, B, C un R -módulo derecho, un R - S -bimódulo, y un S -módulo derecho, respectivamente. Entonces hay un isomorfismo de grupos abelianos:

$$\text{Hom}_S(A \otimes_R B, C) \simeq \text{Hom}_R(A, \text{Hom}_S(B, C)) \quad (2.19)$$

que es natural en A, B y C .

Demostración. Si $a \in A$ y $f: A \otimes_R B \rightarrow C$ es un S -homomorfismo, defínase

$$\alpha f(a): B \rightarrow C : b \mapsto f(a \otimes b).$$

Está claro que $\alpha f(a)(b)$ es aditiva en b y que, para $s \in S$, $\alpha f(a)$ lleva bs en $f(a \otimes bs) = f((a \otimes b)s) = f(a \otimes b)s$. Esto dice que $\alpha f(a) \in \text{Hom}_S(B, C)$.

Si $r \in R$, entonces $\alpha f(ar)$ lleva b en $f(ar \otimes b) = f(a \otimes rb) = \alpha f(a)(rb)$. Esto dice que $\alpha f(ar) = (\alpha f(a))r$, así que $\alpha f \in \text{Hom}_R(A, \text{Hom}_S(B, C))$.

También está claro que $\alpha(f + f') = \alpha f + \alpha f'$, de modo que $\alpha: f \mapsto \alpha f$ es un homomorfismo de grupos abelianos.

Inversamente, si $g: A \rightarrow \text{Hom}_S(B, C)$ es un R -homomorfismo, entonces $g(ar)(b) = (g(a)r)(b) = g(a)(rb)$. Esto implica que $\beta g: a \otimes b \mapsto g(a)(b)$ define bien una aplicación aditiva $\beta g: A \otimes_R B \rightarrow C$. Además,

$$\beta g((a \otimes b)s) = \beta g(a \otimes bs) = g(a)(bs) = g(a)(b)s = \beta g(a \otimes b)s,$$

para $s \in S$; y $\beta(g + g') = \beta g + \beta g'$, de modo que βg es un S -homomorfismo. Es evidente que $\alpha\beta g = g$ y $\beta\alpha f = f$, así que $\alpha: \text{Hom}_S(A \otimes_R B, C) \rightarrow \text{Hom}_R(A, \text{Hom}_S(B, C))$ es un isomorfismo.

La naturalidad de α en A, B, C sigue por cálculos rutinarios. \square

El resultado de la Proposición 2.19 dice que el funtor $(- \otimes_R B): \text{Mod-}R \rightarrow \text{Mod-}S$ es un adjunto izquierdo al funtor representable $\text{Hom}_R(B, -): \text{Mod-}S \rightarrow \text{Mod-}R$.

Es de esperar, entonces, que una propiedad especial de $\text{Hom}_R(B, -)$ corresponda a otra propiedad especial de $(- \otimes_R B)$. Cabe recordar el Lema 2.67 que dice que $\text{Hom}_R(B, -)$ es exacto a la izquierda.

Lema 2.75. *Si $D \in R\text{-Bimod-}S$, el funtor $(- \otimes_R D): \text{Mod-}R \rightarrow \text{Mod-}S$ es exacto a la derecha.*

Demostración. Dada una sucesión exacta corta $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ en $\text{Mod-}R$, se debe comprobar que la sucesión siguiente es exacta:

$$A \otimes_R D \xrightarrow{f_{\#}} B \otimes_R D \xrightarrow{g_{\#}} C \otimes_R D \rightarrow 0$$

donde $f_{\#} := f \otimes 1_D$, $g_{\#} := g \otimes 1_D$. Se debe mostrar que $g_{\#}$ es sobreyectivo y que $\text{im } f_{\#} = \ker g_{\#}$.

Como $g: B \rightarrow C$ es sobreyectivo, los elementos de $C \otimes_R D$ son sumas finitas de la forma $\sum_j g(b_j) \otimes d_j = g_{\#}(\sum_j b_j \otimes d_j)$. Luego $g_{\#}$ es sobreyectivo.

Como $g \circ f = 0$, se ve que $g_{\#}(f_{\#}(a \otimes d)) = g_{\#}(f(a) \otimes d) = g(f(a)) \otimes d = 0$ para los tensores simples $a \otimes d$ que generan $A \otimes_R D$ aditivamente. Entonces $g_{\#} \circ f_{\#} = 0$; en particular, se obtiene $\text{im } f_{\#} \subseteq \ker g_{\#}$.

Por lo tanto, hay un S -homomorfismo $\gamma: (B \otimes_R D)/\text{im } f_{\#} \rightarrow C \otimes_R D$ determinado por $\gamma([b \otimes d]) := g_{\#}(b \otimes d) = g(b) \otimes d$, cuyo núcleo es $\ker g_{\#}/\text{im } f_{\#}$. \llbracket Resulta que la coclase $[b \otimes d]$ depende solamente de $g(b)$ y d . En efecto, si $c = g(b) = g(b')$ para algunos $b, b' \in B$, entonces $g(b - b') = 0$, luego $b - b' = f(a)$ con $a \in A$; de ahí $b \otimes d = b' \otimes d + f_{\#}(a \otimes d)$. \rrbracket

Ahora $h(c, d) := [b \otimes d]$ determina una función bien definida $h: C \times D \rightarrow (B \otimes_R D)/\text{im } f_{\#}$, aditiva en sus dos argumentos, que además cumple

$$h(cr, d) = [br \otimes d] = [b \otimes rd] = h(c, rd),$$

porque $g(br) = g(b)r = cr$ cuando $g(b) = c$. Luego h determina un S -homomorfismo $\varphi: C \otimes_R D \rightarrow (B \otimes_R D)/\text{im } f_{\#}$ dado por $\varphi(c \otimes d) := [b \otimes d]$ cuando $g(b) = c$.

Entonces $\varphi \circ \gamma$ es la identidad sobre $(B \otimes_R D)/\text{im } f_{\#}$, así que γ es un monomorfismo, con núcleo trivial: lo cual implica que $\ker g_{\#} = \text{im } f_{\#}$. \square

El lema anterior ejemplifica un fenómeno general, no demostrado aquí, para funtores adjuntos entre categorías abelianas: *un adjunto izquierdo es exacto a la derecha y un adjunto derecho es exacto a la izquierda.*²²

²²Para una demostración, véase el Teorema 2.6.1 del libro de Weibel.

2.6 Ejercicios sobre categorías y funtores

Ejercicio 2.1. En las categorías de la lista siguiente, comprobar que la composición de morfismos es asociativa; y caracterizar los isomorfismos.

- (a) Set_* es la categoría de **conjuntos puntuados**. Los objetos son pares (X, x_0) donde X es un conjunto con $x_0 \in X$. Un morfismo $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ es una función $f: X \rightarrow Y$ tal que $f(x_0) = y_0$.
- (b) Top_* es la categoría de **espacios topológicos puntuados**: sus objetos son pares (X, x_0) con $x_0 \in X$, donde $X \in \text{Top}$.
- (c) Si \mathbb{F} es un cuerpo, $\mathbb{F}\text{-Alg}$ es la categoría de **álgebras sobre \mathbb{F}** . Una \mathbb{F} -álgebra es un espacio \mathbb{F} -vectorial A que es a su vez un anillo, cuya multiplicación es \mathbb{F} -bilineal. Un morfismo $\varphi: A \rightarrow B$ es una aplicación \mathbb{F} -lineal multiplicativa tal que $\varphi(1) = 1$.
- (d) Poset es la categoría de **conjuntos parcialmente ordenados**; sus morfismos son funciones monótonas (no decrecientes).
- (e) Htop es la categoría cuyos objetos son los de Top y cuyos morfismos $[f]: X \rightarrow Y$ son *clases de homotopía*²³ de funciones continuas $f \in \text{Top}(X, Y)$.

Ejercicio 2.2. En una categoría \mathcal{C} cualquiera, sean $f \in \mathcal{C}(A, B)$ y $g \in \mathcal{C}(B, C)$. Demostrar:

- (a) Si f y g son monomorfismos, entonces gf es un monomorfismo.
- (b) Si f y g son epimorfismos, entonces gf es un epimorfismo.
- (c) Dados f y g , si gf es mónico, entonces f es mónico.
- (d) Dados f y g , si gf es épico, entonces g es épico.

Ejercicio 2.3. Sea X un espacio topológico. Un **camino** en X es una función continua $f: [0, 1] \rightarrow X$. Sea $\Pi_1(X)$ la categoría cuyos objetos son los puntos de X , y en donde los morfismos en $\Pi_1(X)(x, y)$ son las clases de homotopía de caminos desde x hasta y . Mostrar que cada morfismo es un isomorfismo, es decir, que $\Pi_1(X)$ es un grupoide (llamado el **grupoide fundamental** de X).

Si $x_0 \in X$, de modo que $(X, x_0) \in \text{Top}_*$, se define el **grupo fundamental** $\pi_1(X, x_0)$ de manera análoga. ¿Cuál es esa definición?

²³Dos funciones continuas $f_0, f_1: X \rightarrow Y$ son **homotópicas** si existe una función continua $F: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ tal que $F(x, 0) = f_0(x)$, $F(x, 1) = f_1(x)$ para todo $x \in X$. Esto define una relación de equivalencia (*homotopía*) en cada $\text{Top}(X, Y)$.

Ejercicio 2.4. Sea $\text{Vect-}\mathbb{F}$ la categoría de espacios \mathbb{F} -vectoriales y sea $\mathcal{U}: \text{Vect-}\mathbb{F} \rightarrow \text{Set}$ el funtor olvidadizo. Sea $\mathcal{V}: \text{Set} \rightarrow \text{Vect-}\mathbb{F}$ el *functor libre* que lleva cada conjunto X al espacio \mathbb{F} -vectorial $\mathcal{V}X$ cuya base es X (las combinaciones lineales formales de elementos de X).

Si $X \in \text{Set}$ y $W \in \text{Vect-}\mathbb{F}$, observar que cada aplicación lineal $g: \mathcal{V}X \rightarrow W$ define una función $g|_X: X \rightarrow \mathcal{U}W$; y que cada $f: X \rightarrow \mathcal{U}W$ se extiende a una aplicación lineal $\tilde{f}: \mathcal{V}X \rightarrow W$. Concluir que hay una biyección $\alpha_{X,W}: \text{Vect-}\mathbb{F}(\mathcal{V}X, W) \leftrightarrow \text{Set}(X, \mathcal{U}W)$.

Demostrar que estas biyecciones son *naturales* en X y en W , para así obtener isomorfismos naturales $\alpha_{X,-}: \text{Vect-}\mathbb{F}(\mathcal{V}X, -) \Rightarrow \text{Set}(X, \mathcal{U}-)$ y $\alpha_{-,W}: \text{Vect-}\mathbb{F}(\mathcal{V}-, W) \Rightarrow \text{Set}(-, \mathcal{U}W)$.

Ejercicio 2.5. Definir un funtor contravariante $\mathcal{O}: \text{Top}^\circ \rightarrow \text{Poset}$ tal que $\mathcal{O}(X)$ es la topología del espacio topológico X . ¿Cómo actúa este funtor sobre morfismos?

Ejercicio 2.6. Sea $[n] := \{0, 1, \dots, n\}$ para $n \in \mathbb{N}$, con los elementos en el orden usual.²⁴ La **categoría simplicial** $\underline{\Delta}$ es la categoría pequeña cuyos objetos son todos estos $[n]$ y cuyos morfismos son las *funciones no decrecientes* $h: [m] \rightarrow [n]$.

Entre dos ordinales consecutivos, los únicos monomorfismos en $\underline{\Delta}([n-1], [n])$ son u_n^0, \dots, u_n^n y los únicos epimorfismos en $\underline{\Delta}([n+1], [n])$ son v_n^0, \dots, v_n^n , donde la imagen de u_n^i omite i , mientras v_n^i repite i :

$$u_n^i := \begin{cases} j \mapsto j & \text{si } j < i, \\ j \mapsto j+1 & \text{si } j \geq i, \end{cases} \quad v_n^i := \begin{cases} j \mapsto j & \text{si } j \leq i, \\ j \mapsto j-1 & \text{si } j > i. \end{cases}$$

Comprobar que estos morfismos cumplen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} u_{n+1}^j u_n^i &= u_{n+1}^i u_n^{j-1} & \text{si } i < j; \\ v_n^j v_{n+1}^i &= v_n^i v_{n+1}^{j+1} & \text{si } i \leq j; \end{aligned} \quad v_n^j u_{n+1}^i = \begin{cases} u_n^i v_{n-1}^{j-1} & \text{si } i < j, \\ 1_{[n]} & \text{si } i = j, j+1, \\ u_n^{i-1} v_{n-1}^j & \text{si } i > j+1. \end{cases}$$

Ejercicio 2.7. (Continuación del Ejercicio 2.6). Demostrar que cada morfismo $h \in \underline{\Delta}([m], [n])$ posee una factorización única de la forma

$$h = u_n^{i_{n-k}} \dots u_{k+1}^{i_1} v_k^{j_1} \dots v_{m-k}^{j_{m-k}}$$

donde $0 \leq i_1 \leq \dots \leq i_{n-k} \leq n$; $0 \leq j_1 < \dots < j_{m-k} < m$.

Ejercicio 2.8. Una transformación natural $\alpha: \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G}$ entre dos funtores $\mathcal{F}, \mathcal{G}: \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{D}$ se llaman un *isomorfismo natural* si cada componente α_A es un isomorfismo en $\mathcal{D}(\mathcal{F}A, \mathcal{G}A)$. Demostrar que esto sucede si y solo si hay otra transformación natural $\beta: \mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{F}$ tal que $\beta \circ \alpha = 1_{\mathcal{F}}$ y $\alpha \circ \beta = 1_{\mathcal{G}}$.

²⁴Se considera $[n]$ como el *enésimo número ordinal*, aunque el mismo conjunto – sin el orden – es el número cardinal $(n+1)$.

Ejercicio 2.9. Algunos conceptos familiares pueden ser redefinidos como funtores. En cada caso, se declara el efecto del funtor sobre objetos; hay que completar la definición al precisar su efecto sobre morfismos. Además: ¿cómo se debe interpretar una transformación natural entre dos funtores del mismo tipo?

- (a) Una **acción** de un grupo G sobre un conjunto X es un funtor $\underline{X}: BG \rightarrow \text{Set}$ tal que $\underline{X}(*) = X$. (Véase el Ejemplo 2.6.)

Una variante: una **representación** del grupo G es un funtor $\underline{V}: BG \rightarrow \text{Vect-}\mathbb{F}$.

- (b) Si G es un grupo, el *subgrupo conmutador* $[G, G]$ es el subgrupo (normal) generado por los elementos $ghg^{-1}h^{-1}$ con $g, h \in G$. El grupo cociente $G/[G, G]$ es abeliano. La **abelianización** es el funtor $\mathcal{A}: \text{Grp} \rightarrow \text{Ab}$ dado sobre objetos por $\mathcal{A}(G) := G/[G, G]$.

- (c) Si X es un espacio topológico, un **prehaz de conjuntos** sobre X es un funtor contravariante $\mathcal{O}: \text{Top-}X^\circ \rightarrow \text{Set}$. (Véase el Ejemplo 2.5.) Se denota por $r_{UV}: \mathcal{O}(U) \rightarrow \mathcal{O}(V)$ la *restricción* asociada por \mathcal{O} a la inclusión $V \hookrightarrow U$, si $V \subseteq U$ son abiertos de X .

Un prehaz de grupos abelianos es un funtor contravariante $\mathcal{O}: \text{Top-}X^\circ \rightarrow \text{Ab}$.

Ejercicio 2.10. Los siguientes funtores son representables. En cada caso, explicar porque el objeto mencionado representa el funtor dado.

- (a) Si R^\times es el conjunto de elementos invertibles del anillo R , el funtor $(-)^\times: \text{Ring} \rightarrow \text{Set}$ dado por $R \mapsto R^\times$ es representado por el anillo $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ (los polinomios de Laurent en una variable).
- (b) El funtor $\mathcal{C}: \text{Top} \rightarrow \text{Set}$, tal que $\mathcal{C}X$ es el conjunto de los caminos en X , es representado por el espacio topológico $I = [0, 1]$.
- (c) El funtor $\mathcal{T}: \text{Top}^\circ \rightarrow \text{Set}$, donde $\mathcal{T}X$ es el conjunto de partes abiertas de X , es representado por el espacio de Sierpiński $S = \{0, 1\}$ (cuya topología tiene solo tres abiertos: \emptyset , $\{0\}$ y S).

Ejercicio 2.11. En la Definición 2.21 de bifuntor como un funtor $\mathcal{F}: \mathbf{C} \times \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{E}$, ¿por qué es obligatorio que el diagrama conmuta?

Ejercicio 2.12. Dado un diagrama $B \xleftarrow{f} A \xrightarrow{g} C$ en la categoría Ab de grupos abelianos, denótese su pushout por $B \oplus_A C$. Comprobar que este pushout existe y que está dado por el grupo cociente

$$B \oplus_A C := (B \oplus C)/D,$$

donde $D := \{(f(a), -g(a)) : a \in A\} \subset B \oplus C$.

Ejercicio 2.13. Si un par de morfismos paralelos $f, g: A \rightrightarrows B$ en una categoría \mathcal{C} posee un igualador (K, k) o un coigualador (Q, q) – véase la Definición 2.53 – demostrar que k es un monomorfismo y q es un epimorfismo, necesariamente.

[[Por lo tanto, en una categoría aditiva cada núcleo es mónico y cada conúcleo es épico.]]

Ejercicio 2.14. Si P , junto con morfismos $p: P \rightarrow A$ y $q: P \rightarrow B$, es un pullback del diagrama $A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$:

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{q} & B \\ p \downarrow & \lrcorner & \downarrow g \\ A & \xrightarrow{f} & C \end{array} \quad (2.11)$$

y si $f: A \rightarrow C$ es un monomorfismo, demostrar que q también es un monomorfismo.

Ejercicio 2.15. En una categoría \mathcal{C} que posee productos de cada par de objetos, demostrar que \mathcal{C} posee igualadores si y solo si posee pullbacks:

- (a) Si \mathcal{C} posee igualadores, dado una diagrama $A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$, considérese el igualador (K, k) de $fp_1, gp_2: A \times B \rightrightarrows C$.
- (b) Si \mathcal{C} posee pullbacks, defínase un *morfismo diagonal* $\Delta: B \rightarrow B \times B$ a partir del cono $B \xleftarrow{1_B} B \xrightarrow{1_B} B$. Dados $f, g: A \rightrightarrows B$, considérese el pullback de $A \xrightarrow{(f,g)} B \times B \xleftarrow{\Delta} B$.

Ejercicio 2.16. Sea $\mathcal{F}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un funtor aditivo entre dos categorías abelianas.

- (a) Demostrar que \mathcal{F} es exacto a la izquierda (Definición 2.66) si toda vez que la sucesión $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ es exacta en \mathcal{C} , la sucesión $0 \rightarrow \mathcal{F}A \xrightarrow{\mathcal{F}f} \mathcal{F}B \xrightarrow{\mathcal{F}g} \mathcal{F}C$ es exacta en \mathcal{D} .
- (b) Demostrar que \mathcal{F} es exacto a la derecha si toda vez que la sucesión $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ es exacta en \mathcal{C} , la sucesión $\mathcal{F}A \xrightarrow{\mathcal{F}f} \mathcal{F}B \xrightarrow{\mathcal{F}g} \mathcal{F}C \rightarrow 0$ es exacta en \mathcal{D} .

[[Indicación: En ambos casos, la sucesión de las hipótesis es un “empalme” de dos sucesiones exactas cortas. En el caso (a), si $D = \text{img } g$ y $E = \text{coker } g$, considerar $A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow D$ y $D \rightarrowtail C \twoheadrightarrow E$. En el caso (b), si $F = \ker f$ y $G = \text{coim } f$, considerar $F \rightarrowtail A \twoheadrightarrow G$ y $G \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$.]]

Ejercicio 2.17. Si el diagrama $\mathcal{F}: \mathbf{J} \rightarrow \mathcal{C}$ posee un límite $L = \lim_{\mathbf{J}} \mathcal{F} \in \mathcal{C}$ y si $X \in \mathcal{C}$, el diagrama compuesto $\mathcal{C}(X, \mathcal{F}-): \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{Set}$ posee un límite en \mathbf{Set} . Demostrar que hay una biyección $\mathcal{C}(X, L) \leftrightarrow \lim_{\mathbf{J}} \mathcal{C}(X, \mathcal{F}-)$ que es natural en X .

[[Indicación: Interpretar $\lim_{\mathbf{J}} \mathcal{C}(X, \mathcal{F}-)$ como un cono con cenit X .]]

Ejercicio 2.18. El funtor diagonal $\Delta: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}^J$ se define como sigue: (i) $\Delta B := \underline{B}$ es el funtor constante $j \mapsto B$, $f_{kj} \mapsto 1_B$; (ii) si $h \in \mathbf{C}(B, C)$, $\Delta h := \underline{h}$ es la transformación natural constante $\underline{h}: \underline{B} \Rightarrow \underline{C}$ tal que $h_j = h$ para todo $j \in J$.

Si la categoría \mathbf{C} posee un límite y un colímite para cada diagrama $\mathcal{F}: J \rightarrow \mathbf{C}$, demostrar los funtores $\lim_J: \mathbf{C}^J \rightarrow \mathbf{C}$ y $\operatorname{colim}_J: \mathbf{C}^J \rightarrow \mathbf{C}$ forman adjuntos derecho e izquierdo para Δ , respectivamente:

$$\Delta \dashv \lim_J, \quad \operatorname{colim}_J \dashv \Delta.$$

[[Indicación: Verificar que $\mathbf{C}^J(\underline{B}, \mathcal{F})$ y $\mathbf{C}^J(\mathcal{F}, \underline{C})$ corresponden a conos en \mathbf{C} .]]

Ejercicio 2.19. Comprobar la Proposición: *los adjuntos derechos preservan límites*, al explicar esta cadena de biyecciones naturales:

$$\mathbf{C}^J(\Delta B, \mathcal{G}\mathcal{K}) \leftrightarrow \mathbf{D}^J(\mathcal{F}\Delta B, \mathcal{K}) \leftrightarrow \mathbf{D}^J(\Delta\mathcal{F}B, \mathcal{K}) \leftrightarrow \mathbf{D}(\mathcal{F}B, \lim_J \mathcal{K}) \leftrightarrow \mathbf{C}(B, \mathcal{G} \lim_J \mathcal{K}),$$

dados un objeto $B \in \mathbf{C}$, un diagrama $\mathcal{K}: J \rightarrow \mathbf{D}$ y funtores $\mathcal{F}: \mathbf{C} \rightleftarrows \mathbf{D}: \mathcal{G}$ tales que $\mathcal{F} \dashv \mathcal{G}$. Concluir que $\lim_J \mathcal{G}\mathcal{K} = \mathcal{G} \lim_J \mathcal{K}$.

Otra Proposición: *los adjuntos izquierdos preservan colímites* sigue por dualidad.

Ejercicio 2.20. Dos subcategorías importantes de \mathbf{Top} son $\mathbf{ComHaus}$, los espacios topológicos compactos y de Hausdorff (compactos y T_2); y \mathbf{Tij} , los espacios *de Tjonov* (completamente regulares y de Hausdorff, o $T_{3\frac{1}{2}}$). Hay un funtor de inclusión $\mathcal{I}: \mathbf{ComHaus} \rightarrow \mathbf{Tij}$.

En la otra dirección, un espacio de Tjonov se puede *compactificar*, esto es, encajar $X \in \mathbf{Tij}$ como subespacio denso de un compacto $K \in \mathbf{ComHaus}$. Se sabe que existe una *compactificación de Stone y Čech* βX , junto con una inyección continua $i: X \hookrightarrow \beta X$, con la siguiente propiedad universal: cada función continua $f: X \rightarrow K$, donde K es compacto y de Hausdorff, posee una extensión continua $\tilde{f}: \beta X \rightarrow K$ tal $\tilde{f} \circ i = f$.

Demostrar que $X \mapsto \beta X$ define un funtor $\beta: \mathbf{Tij} \rightarrow \mathbf{ComHaus}$ que es un adjunto izquierdo a la inclusión: $\beta \dashv \mathcal{I}$.

(Se debe mostrar que $\mathbf{ComHaus}(\beta X, K) \leftrightarrow \mathbf{Tij}(X, K)$ son biyecciones naturales en X y K .)

3 Resoluciones y funtores derivados

These disparate [homology and cohomology] theories were pulled together by Cartan and Eilenberg (1956) in a cohesive synthesis based on a concept of derived functors from the category of modules over a ring to the category of abelian groups. — Nathan Jacobson

Von Neumann had to understand and accept much that most of us do not want to accept and do not even wish to understand. — Eugene Wigner

En este capítulo, se explorará diversas propiedades homológicas en la categoría $R\text{-Mod}$ de R -módulos izquierdos, donde R es un anillo no necesariamente conmutativo. Todos los resultados son aplicables a cualquier categoría abeliana (con ciertos ajustes en las demostraciones); en particular a las categorías $\text{Mod-}R$ y $R\text{-Bimod-}S$.

3.1 Módulos proyectivos e injectivos

El lema siguiente distingue una clase especial de sucesiones exactas en $R\text{-Mod}$.

Lema 3.1. *Para una determinada sucesión exacta corta de R -módulos,*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

las siguientes condiciones son equivalentes:

- (a) *hay un R -homomorfismo $s: C \rightarrow B$ tal que $gs = 1_C$;*
- (b) *hay un R -homomorfismo $t: B \rightarrow A$ tal que $tf = 1_A$;*
- (c) *hay un R -submódulo D de B tal que $B = D \oplus \text{im } f$.*

Demostración. $\text{Ad (a)} \implies \text{(b)}$: Tómese $b \in B$; si $c := g(b)$, entonces $g(b - s(c)) = 0$. Como $\ker g = \text{im } f$, hay $a \in A$ tal que $b - s(c) = f(a)$, así que $b = f(a) + s(c)$.

Si $b = f(a') + s(c')$ para algunos $a' \in A$, $c' \in C$, entonces $f(a) + s(c) = f(a') + s(c')$, luego $f(a - a') = s(c' - c)$. Luego $c' - c = g(s(c' - c)) = g(f(a - a')) = 0$; y por ende $f(a - a') = 0$ así que $a = a'$ porque f es inyectivo. En consecuencia, $b = f(a) + s(c)$ de manera única. Ahora se define bien un R -homomorfismo $t: B \rightarrow A$ por $t(f(a) + s(c)) := a$. Se ve que $tf = 1_A$.

$\text{Ad (b)} \implies \text{(c)}$: Si $b \in B$, sea $a := t(b) \in A$. Entonces $t(b - f(a)) = t(b) - a = 0$, así que $v := b - f(a) \in \ker t$. Luego $b = v + f(a) \in \ker t + \text{im } f$. Si $b = v' + f(a')$ con $a' \in A$, $v' \in \ker t$, entonces $a = t(b) = t(f(a')) = a'$ así que $v = v'$. Entonces $b = v + f(a)$ de manera única y por lo tanto $B = \ker t \oplus \text{im } f$.

Ad (c) \implies (a): Si $c \in C$, entonces $g(b) = c$ para algún $b \in B$ porque g es sobreyectivo. Sea $b =: u + f(a)$ (de manera única) con $u \in D$, $a \in A$. Si $c = g(b')$ para $b' = u' + f(a') \in B$, entonces $b - b' \in \ker g = \operatorname{im} f$, así que $u - u' = b - b' - f(a - a') \in D \cap \operatorname{im} f$ y por ende $u' = u$. Además, $c = g(b) = g(u)$. Se define bien $s: C \rightarrow B$ por $s(c) := u$; es obvio que $gs = 1_C$. \square

Definición 3.2. Si una sucesión exacta corta de R -módulos cumple (una de) las condiciones equivalentes del Lema 3.1, se dice que esta sucesión exacta corta **escinde**. Se escribe

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow[g]{s} C \longrightarrow 0 \quad (3.1)$$

si $s \in \operatorname{Hom}_R(C, B)$ cumple $gs = 1_C$. En este caso, vale $B = f(A) \oplus s(C) \simeq A \oplus C$. \diamond

En la categoría $\mathbf{Vect}\text{-}\mathbb{F}$ (cuando R es un cuerpo \mathbb{F}), *todas* las sucesiones exactas cortas escinden. Por ejemplo, se puede completar una base para el espacio \mathbb{F} -vectorial $\operatorname{im} f \leq B$ a una base de B ; los vectores nuevos generan un subespacio D de B tal que $B = D \oplus \operatorname{im} f$.

Cartan y Eilenberg introdujeron una clase de R -módulos, llamados *proyectivos*, que generalizan los R -módulos libres pero mantienen la posibilidad de escisión de SECs. Se definen mediante una propiedad universal, que puede plantearse en cualquier categoría abeliana.

Definición 3.3. En una categoría abeliana \mathcal{C} , un objeto P es **proyectivo** si cumple la siguiente propiedad universal: dados un morfismo $k: P \rightarrow C$ y un *epimorfismo* $g: B \twoheadrightarrow C$, existe un morfismo $h: P \rightarrow B$ tal que $gh = k$. (Dícese que h **levanta** el morfismo dado k .) En otras palabras, h hace conmutar el siguiente diagrama, cuya fila inferior es exacta:

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ h \swarrow & \downarrow k & \\ B & \xrightarrow{g} C & \longrightarrow 0 \end{array} \quad (3.2)$$

En la categoría $R\text{-Mod}$, se dice que P es un **R -módulo proyectivo**. \diamond

Cualquier R -módulo libre P es proyectivo. En efecto, sea $\{e_j : j \in J\}$ una base de P ; dados $k: P \rightarrow B$ y $g: A \twoheadrightarrow B$, elíjanse elementos $x_j \in A$ tales que $g(x_j) = k(e_j)$. Entonces la asignación $h(e_j) := x_j$ se extiende a un R -homomorfismo $h: P \rightarrow A$ tal que $gh = k$.

Proposición 3.4. Para un R -módulo P , las siguientes condiciones son equivalentes:

- (a) P es un R -módulo proyectivo.
- (b) Cada sucesión exacta corta $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$ escinde.
- (c) P es un sumando directo de un R -módulo libre.

Demostración. Ad (a) \implies (b): Dada una sucesión exacta corta $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow P \longrightarrow 0$, hay un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & P & & \\ & & & \swarrow h & \downarrow 1_P & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & P \longrightarrow 0 \end{array}$$

y por el Lema 3.1, la condición $gh = 1_P$ dice que esta sucesión exacta corta escinde.

Ad (b) \implies (c): El R -módulo P es un cociente de un R -módulo libre L , con aplicación cociente $q: L \twoheadrightarrow P$. \llbracket Si $\{x_j\}_{j \in J}$ genera P , tómese $L := R^{(J)}$ con base $\{e_j\}_{j \in J}$ y sea $q(e_j) := x_j$ para cada j . \rrbracket Sea $D := \ker q$ con inclusión $j: D \hookrightarrow L$. Entonces esta sucesión corta es exacta:

$$0 \longrightarrow D \xrightarrow{j} L \xrightarrow{q} P \longrightarrow 0.$$

Hay un R -monomorfismo $s: P \rightarrow L$ con $qs = 1_P$ que la escinde, y la demostración del Lema 3.1 muestra que $L = j(D) \oplus s(P) \simeq D \oplus P$.

Ad (c) \implies (a): Si hay un R -módulo D tal que $L := D \oplus P$ es libre, sea $q: L \rightarrow P$ la aplicación cociente y sea $i: P \rightarrow L$ la inclusión. Hay un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightleftharpoons[i]{q} & P \\ p \downarrow & & \downarrow k \\ A & \xrightarrow{g} & B \longrightarrow 0 \end{array}$$

donde el R -homomorfismo $p: L \rightarrow A$ tal que $gp = kq$ existe porque L es libre y por ende es proyectivo. Sea $h := pi: P \rightarrow A$ la restricción de p al submódulo P de L . Es inmediato que $gh = gpi = kqi = k$. \square

Si R es un *anillo entero principal*, cada R -módulo proyectivo finitamente generado es libre, porque un teorema conocido dice que cada submódulo del R -módulo libre R^n es también libre.¹ En otros anillos, este no es el caso. Por ejemplo, si $R = \mathbb{Z}/6 \simeq \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/3$, entonces $\mathbb{Z}/2$ y $\mathbb{Z}/3$ son sumandos directos de R y por lo tanto son R -módulos proyectivos por la Proposición 3.4(c), pero no son libres sobre R .

Ejemplo 3.5. Sea $S = M_n(R)$ con $n \geq 2$. Del Ejemplo 1.7, R^n es un S -módulo izquierdo. Ahora $S \simeq R^n \oplus \cdots \oplus R^n$ (n veces), al expresar cada matriz en $M_n(R)$ como la suma directa de sus n columnas, mediante un R -isomorfismo que respeta la acción a la izquierda de S (esto es, un S -isomorfismo). Luego R^n es un S -módulo proyectivo, pero no libre. \diamond

¹Véase, por ejemplo, el Teorema 3.7 del libro: Nathan Jacobson, *Basic Algebra I*, Dover, 1985.

Lema 3.6. *Un R -módulo P es proyectivo si y solo si el funtor $\text{Hom}_R(P, -)$ es exacto.*

Demostración. Sea P un R -módulo proyectivo. Si $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ es una SEC en $R\text{-Mod}$, se debe mostrar que la sucesión corta

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_R(P, A) \xrightarrow{f_*} \text{Hom}_R(P, B) \xrightarrow{g_*} \text{Hom}_R(P, C) \longrightarrow 0$$

es exacta en Ab .

En vista del Lema 2.67, basta mostrar que esta sucesión es exacta en $\text{Hom}_R(P, C)$, es decir, que g_* es un epimorfismo en Ab ; o sea, que g_* es sobreyectivo. Por hipótesis, $g: B \twoheadrightarrow C$ es sobreyectivo. Luego, por la Definición 3.3, para cada $k \in \text{Hom}_R(P, C)$ existe $h \in \text{Hom}_R(P, B)$ tal que $k = gh = g_*(h)$; luego g_* es sobreyectivo.

Inversamente, si $\text{Hom}_R(P, -)$ es exacto, este funtor lleva un epimorfismo $g: B \twoheadrightarrow C$ a un homomorfismo sobreyectivo $g_* = \text{Hom}_R(P, g)$ en Ab . Luego, cada R -homomorfismo $k: P \rightarrow C$ es de la forma $k = g_*(h) = gh$ para algún $h \in \text{Hom}_R(P, B)$. Esto dice que P es proyectivo. \square

► El concepto de R -módulo proyectivo tiene una noción pareja, la de un R -módulo injectivo,² al reemplazar la categoría $R\text{-Mod}$ por la categoría opuesta $R\text{-Mod}^\circ$. En paralelo con la Definición 3.3, se puede introducir esta noción en cualquier categoría abeliana.

Definición 3.7. En una categoría abeliana \mathcal{C} , un objeto Q es **injectivo** si cumple la siguiente propiedad universal: dados un morfismo $k: A \rightarrow Q$ y un *monomorfismo* $f: A \rightarrow B$, existe un morfismo $h: B \rightarrow Q$ tal que $hf = k$. (Dícese que h **extiende** el morfismo dado k .) En otras palabras, h hace conmutar el siguiente diagrama, cuya fila superior es exacta:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B \\ & & \downarrow k & \swarrow h & \\ & & Q & & \end{array} \quad (3.3)$$

En la categoría $R\text{-Mod}$ (o $R\text{-Mod}^\circ$), se dice que Q es un **R -módulo injectivo**. \diamond

Escolio 3.8. *Un R -módulo Q es injectivo si y solo si el funtor contravariante $\text{Hom}_R(-, Q)$ es exacto.* \boxplus

Proposición 3.9. *Un R -módulo Q es injectivo si y solo si cada sucesión exacta corta $0 \longrightarrow Q \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ escinde.*

²Históricamente, los módulos injectivos son más antiguos que los proyectivos: fueron introducidos por Reinhold Baer en 1940, en un estudio sobre grupos abelianos.

Demostración. $\text{Ad} \implies$: Sea Q un R -módulo injectivo. Dada una sucesión exacta corta de la forma $0 \longrightarrow Q \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$, hay un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & Q & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow 1_Q & \swarrow t & & & \\ & & Q & & & & \end{array}$$

y la condición $tf = 1_Q$ dice que esta sucesión exacta corta escinde, en vista del Lema 3.1.

$\text{Ad} \impliedby$: Dados un R -homomorfismo $k: A \rightarrow Q$ y un R -monomorfismo $f: A \rightarrow B$ considérese el *pushout*:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ k \downarrow & & \downarrow h \\ Q & \xrightarrow{j} & C \end{array} \quad (3.4)$$

Sea $q: C \rightarrow C/j(Q)$ el R -homomorfismo cociente; entonces hay una SEC:

$$0 \longrightarrow Q \xrightarrow{j} C \xrightarrow{q} C/j(Q) \longrightarrow 0$$

la cual escinde, por hipótesis: hay un R -homomorfismo $t: C \rightarrow Q$ tal que $tj = 1_Q$. La conmutatividad del diagrama (3.4) implica que $th \in \text{Hom}_R(B, Q)$ cumple

$$(th)f = t(hf) = t(jk) = (tj)k = 1_Q k = k.$$

Luego Q es un R -módulo injectivo. □

Lema 3.10 (Baer). *Un R -módulo Q es injectivo si y solo si cada R -homomorfismo $k: J \rightarrow Q$ desde un ideal izquierdo $J \subseteq R$ puede extenderse en un R -homomorfismo $h: R \rightarrow Q$.*

Demostración. $\text{Ad} \implies$: Si Q es injectivo, aplíquese la Definición 3.7 con $k: J \rightarrow Q$ y la inclusión $j: J \rightarrow A$ para obtener la extensión deseada $h: R \rightarrow Q$.

$\text{Ad} \impliedby$: Sean dados dos R -homomorfismos $k: A \rightarrow Q$ y $f: A \rightarrow B$ con f injectivo. Se puede considerar A como un R -submódulo de B , siendo f la inclusión. Las extensiones intermedias (B', g) , donde $B' \subseteq B$ es un R -submódulo con $f(A) \subseteq B'$ y $g: B' \rightarrow Q$ es tal que $g(f(x)) = k(x)$ para $x \in A$, forman un conjunto parcialmente ordenado \mathcal{E} . Aquí $(B'_1, g_1) \leq (B'_2, g_2)$ toda vez que $B'_1 \subseteq B'_2$ y $g_2|_{B'_1} = g_1$. Una cadena de tales pares posee una cota superior en \mathcal{E} dada por la unión de sus submódulos. Al aplicar el Lema de Zorn, se concluye que hay una extensión maximal (C, g') en \mathcal{E} .

Si fuera $C \neq B$, habría un elemento $b \in B \setminus C$; entonces $J := \{r \in R : rb \in C\}$ sería un ideal izquierdo en R . Defínase $k: J \rightarrow Q$ por $k(r) := g'(rb)$. Por hipótesis, k se extiende a $h: R \rightarrow Q$. Sea $C' := C + Rb$ y defínase $g'': C' \rightarrow Q$ por $g''(c + rb) := g'(c) + h(r)$, para $c \in C$.

Este homomorfismo g'' está bien definido: si $c_1 + r_1b = c_2 + r_2b$, entonces $(r_1 - r_2)b = c_2 - c_1 \in C$, así que $r_1 - r_2 \in J$ y luego

$$g'(c_2 - c_1) = g'((r_1 - r_2)b) = k(r_1 - r_2) = h(r_1 - r_2),$$

de modo que $g'(c_1) + h(r_1) = g'(c_2) + h(r_2)$. Ahora, si $c \in C$, se puede tomar $r = 0$ para obtener $g''(c) = g'(c)$; pero esto implicaría que $(C, g') < (C', g'')$ en \mathcal{E} , contrario a la maximalidad de (C, g') . Por lo tanto, $C = B$ y $g': B \rightarrow Q$ cumple $g'f = k$. Se concluye que Q es un R -módulo inyectivo. \square

3.2 Resoluciones proyectivas

Cualquier R -módulo A es un cociente de un R -módulo libre (como ya se observó en la demostración de la Proposición 3.4). Cada R -módulo libre es proyectivo; entonces, *ipso facto*, cualquier R -módulo A es un cociente de un R -módulo proyectivo. Esta circunstancia da lugar al concepto de una *resolución proyectiva* de un R -módulo, que resulta ser un concepto clave del álgebra homológica.

¶ También es cierto que cualquier R -módulo es un submódulo de un R -módulo inyectivo. En contraste con la situación anterior, este es un teorema no trivial (véase, por ejemplo, el Teorema XX.4.1 del libro de Lang). La diferencia se debe a que las categorías $R\text{-Mod}$ y $R\text{-Mod}^\circ$ no son equivalentes: no es posible pasar de una situación a otra por “abstract nonsense”.³ ¶

Más generalmente, dícese que una categoría abeliana \mathbf{C} **posee suficientes proyectivos** si para cada objeto $A \in \mathbf{C}$ hay un epimorfismo $g: P \rightarrow A$ donde P es un objeto proyectivo.

Ahora bien, dado un R -módulo A , sea $\pi: P_0 \rightarrow A$ un epimorfismo donde P_0 es un R -módulo proyectivo, y sea $A_0 := \ker \pi$. También hay un epimorfismo $d_1: P_1 \rightarrow A_0$ para algún R -módulo proyectivo P_1 . Como $\text{im } d_1 = A_0 = \ker \pi$ por construcción, la sucesión $P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\pi} A$ es exacta. Al iterar este proceso, se llega al concepto siguiente.

Definición 3.11. Una **resolución proyectiva** de un R -módulo A es un complejo exacto en $R\text{-Mod}$, de la forma

$$\cdots \longrightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\pi} A \longrightarrow 0 \quad (3.5)$$

donde cada P_n es un R -módulo proyectivo.

³El término *abstract nonsense* parece haber originado en una referencia jocosa de Norman Steenrod a los métodos categóricos de MacLane. Lejos de criticar tales métodos, Steenrod los adoptó para formalizar su enfoque general sobre cohomologías.

Si cada P_n es un R -módulo *libre*, esta es una **resolución libre**. Si hay $n \in \mathbb{N}$ tal que $P_r = 0$ para $r > n$, esta es una **resolución finita**. \diamond

La existencia de una resolución proyectiva de $A \in R\text{-Mod}$ proviene del “empalme” de sucesiones exactas cortas $0 \rightarrow A_r \rightarrow P_r \rightarrow A_{r-1} \rightarrow 0$, así:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & A_3 & & & A_1 & & \\
 & \swarrow & & & \swarrow & & \\
 \cdots & \longrightarrow & P_3 & \xrightarrow{d_3} & P_2 & \xrightarrow{d_2} & P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\pi} A \longrightarrow 0 \\
 & & \searrow & & \swarrow & & \searrow \\
 & & & A_2 & & & A_0
 \end{array}$$

Cada monomorfismo $j_r: A_r \rightarrow P_r$ se define inductivamente como núcleo de $d_r: P_r \rightarrow P_{r-1}$ (con $d_0 := \pi$ y $P_{-1} := A$ para empezar la inducción); y cada epimorfismo $q_r: P_r \rightarrow A_{r-1}$ viene de la existencia de suficientes proyectivos en $R\text{-Mod}$. Entonces los R -homomorfismos $d_r := j_{r-1}q_r: P_r \rightarrow P_{r-1}$ definen un complejo exacto, porque $\text{im } d_{r+1} = \text{im } j_r = \ker q_r = \ker d_r$.

Definición 3.12. Un complejo de cadenas

$$C_\bullet: \cdots \rightarrow C_2 \xrightarrow{d_2} C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \rightarrow 0$$

se llama **proyectivo** si cada C_r es un R -módulo proyectivo. Además, (C_\bullet, d) es un **complejo acíclico** si $H_n(C) = 0$ para $n \geq 1$; en otras, es exacto excepto posiblemente en C_0 . La resolución proyectiva (3.5) es, por un lado, un complejo proyectivo **aumentado** por el epimorfismo $\pi: P_0 \twoheadrightarrow A$ tal que $\pi d_1 = 0$; se escribe $P_\bullet \xrightarrow{\pi} A$ para denotar esa circunstancia (un poco abusivamente, pues P_\bullet y A son objetos de categorías diferentes). Por otro lado, (3.5) es un complejo acíclico. \diamond

Debe estar claro que la resolución proyectiva de un R -módulo no es única, porque en cada paso hay mucha libertad de elegir el R -módulo proyectivo P_r . El efecto de usar dos resoluciones proyectivas diferentes está explorado en el siguiente *teorema de comparación*.

Proposición 3.13. Sea $u: A \rightarrow B$ un R -homomorfismo. Si $P_\bullet \xrightarrow{\pi} A$ es un complejo proyectivo sobre A , y si $C_\bullet \xrightarrow{\rho} B$ es un complejo acíclico, entonces hay un morfismo de complejos $u_\bullet: P_\bullet \rightarrow C_\bullet$ que **levanta** u , es decir, $\rho u_0 = u \pi: P_0 \rightarrow B$, de modo que este diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & P_2 & \xrightarrow{d_2} & P_1 & \xrightarrow{d_1} & P_0 \xrightarrow{\pi} A \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow u_2 & & \downarrow u_1 & & \downarrow u_0 \\
 \cdots & \longrightarrow & C_2 & \xrightarrow{\delta_2} & C_1 & \xrightarrow{\delta_1} & C_0 \xrightarrow{\rho} B \longrightarrow 0
 \end{array} \quad (3.6)$$

Además, dos morfismos de complejos $P_\bullet \rightarrow C_\bullet$ que levantan u son homotópicos.

Demostración. Se construye los $u_r: P_r \rightarrow C_r$ inductivamente, considerando el morfismo dado $u: A \rightarrow B$ como $u_{-1}: P_{-1} \rightarrow C_{-1}$. Como P_0 es proyectivo y $\rho: C_0 \rightarrow B$ es un epimorfismo, existe $u_0: P_0 \rightarrow C_0$ tal que $\rho u_0 = u \pi$, por lo tanto el último cuadrado a la derecha es conmutativo.

Por hipótesis, $\pi d_1 = 0$; luego $\rho u_0 d_1 = u \pi d_1 = 0$, lo cual dice que $\text{im}(u_0 d_1) \subseteq \ker \rho = \text{im } \delta_1$. (La segunda igualdad sigue porque el complejo de abajo es exacto en C_0 .) Como $\delta_1: C_1 \rightarrow \text{im } \delta_1$ es un epimorfismo y P_1 es proyectivo, existe $u_1: P_1 \rightarrow C_1$ tal que $\delta_1 u_1 = u_0 d_1$ y por ende el penúltimo cuadrado es conmutativo.

Después de haber construido $u_n: P_n \rightarrow C_n$, nótese que $\delta_n u_n d_{n+1} = u_{n-1} d_n d_{n+1} = 0$; luego $\text{im}(u_{n-1} d_n) \subseteq \ker \delta_n = \text{im } \delta_{n+1}$. Como P_{n+1} es proyectivo, existe $u_{n+1}: P_{n+1} \rightarrow C_{n+1}$ tal que $\delta_{n+1} u_{n+1} = u_n d_{n+1}$. Esta igualdad es válida para todo n (por la inducción) así que $u_\bullet: P_\bullet \rightarrow C_\bullet$ es un morfismo de complejos y todo el diagrama es conmutativo.

Sea $v_\bullet: P_\bullet \rightarrow C_\bullet$ otro morfismo de complejos tal que $\rho v_0 = u \pi$. Entonces $\rho(u_0 - v_0) = 0$, así que $\text{im}(u_0 - v_0) \subseteq \ker \rho = \text{im } \delta_1$. Luego hay un R -homomorfismo $s_0: P_0 \rightarrow C_1$ tal que $\delta_1 s_0 = u_0 - v_0$.

Para hacer una inducción sobre n , supóngase que ya se ha construido $s_r: P_r \rightarrow C_{r+1}$ para $r = 1, \dots, n-1$ tales que $\delta_{r+1} s_r + s_{r-1} d_r = u_r - v_r$ para cada r , siguiendo la fórmula (1.16). (Tómese $s_{-1} := 0$.)

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & P_3 & \xrightarrow{d_3} & P_2 & \xrightarrow{d_2} & P_1 & \xrightarrow{d_1} & P_0 & \xrightarrow{\pi} & A \\
 & & & \swarrow s_2 & \downarrow u_2 - v_2 & \swarrow s_1 & \downarrow u_1 - v_1 & \swarrow s_0 & \downarrow u_0 - v_0 & & \downarrow u \\
 \cdots & \longrightarrow & C_3 & \xrightarrow{\delta_3} & C_2 & \xrightarrow{\delta_2} & C_1 & \xrightarrow{\delta_1} & C_0 & \xrightarrow{\rho} & B
 \end{array}$$

Entonces

$$\delta_n(u_n - v_n - s_{n-1} d_n) = (u_{n-1} - v_{n-1} - \delta_n s_{n-1}) d_n = s_{n-2} d_{n-1} d_n = 0,$$

así que $\text{im}(u_n - v_n - s_{n-1} d_n) \subseteq \ker \delta_n = \text{im } \delta_{n+1}$. Luego hay un morfismo $s_n: P_n \rightarrow C_{n+1}$ tal que $\delta_{n+1} s_n = u_n - v_n - s_{n-1} d_n$. La inducción establece la validez de (1.16) para todo n . Se ha construido una homotopía de cadenas entre u_\bullet y v_\bullet . \square

Corolario 3.14. Si $P_\bullet \xrightarrow{\pi} A$ y $P'_\bullet \xrightarrow{\rho} A$ son dos resoluciones proyectivas de un R -módulo A , entonces los complejos de cadenas P_\bullet y P'_\bullet son homotópicamente equivalentes y por lo tanto poseen grupos de homología isomorfos.

Demostración. Al aplicar la Proposición 3.13 a la identidad $1_A: A \rightarrow A$, se obtiene un par de morfismos de cadenas $u_\bullet: P_\bullet \rightarrow P'_\bullet$ y $v_\bullet: P'_\bullet \rightarrow P_\bullet$ que levantan la identidad, es decir, $\rho u_0 = \pi$ y $\pi v_0 = \rho$. Sus composiciones $v_\bullet u_\bullet: P_\bullet \rightarrow P_\bullet$ y $u_\bullet v_\bullet: P'_\bullet \rightarrow P'_\bullet$ también levantan la identidad: $\pi v_0 u_0 = \pi$ y $\rho u_0 v_0 = \rho$. Entonces la misma proposición produce homotopías de

cadena $v_\bullet u_\bullet \sim 1_{A_\bullet}$ y $u_\bullet v_\bullet \sim 1_{B_\bullet}$. En consecuencia, los dos complejos son homotópicamente equivalentes.

El Lema 1.35 entonces implica que $u_*: H_n(P) \rightarrow H_n(P')$ y $v_*: H_n(P') \rightarrow H_n(P)$ son homomorfismos inversos, de modo que $H_n(P) \simeq H_n(P')$, para cada $n \in \mathbb{N}$. \square

Ejemplo 3.15. Si A ya es un R -módulo proyectivo, la sucesión exacta

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow A \xrightarrow{1_A} A \longrightarrow 0$$

es una resolución proyectiva de A , con $P_0 = A$ y $P_r = 0$ para $r \geq 1$.

Cuando la resolución es finita, se puede descartar los ceros a la izquierda. La resolución anterior se escribe entonces como $A \xrightarrow{1_A} A \longrightarrow 0$.

Si $m \in \mathbb{N}$ con $m \geq 2$, sea $(\times m): \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} : k \mapsto mk$ la multiplicación por m y sea $q: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/m : n \mapsto (n \bmod m)$ la aplicación cociente. Entonces la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times m} \mathbb{Z} \xrightarrow{q} \mathbb{Z}/m \longrightarrow 0$$

es una resolución libre finita de \mathbb{Z}/m en la categoría $\mathbf{Ab} = \mathbb{Z}\text{-Mod}$.

Hay una resolución libre infinita de $A = \mathbb{Z}/2$ en la categoría $(\mathbb{Z}/4)\text{-Mod}$ dada por

$$\cdots \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}/4 \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}/4 \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}/4 \xrightarrow{q} \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 0.$$

Esta no es una resolución proyectiva en la categoría \mathbf{Ab} , porque el grupo de torsión⁴ $\mathbb{Z}/4$ no es un sumando directo de un grupo abeliano libre \mathbb{Z}^J , porque un subgrupo de un grupo abeliano libre es también libre. \diamond

► Al pasar a la categoría opuesta $R\text{-Mod}^\circ$, se cambia los módulos proyectivos por módulos injectivos, llegando al concepto siguiente y un teorema de comparación análogo.

Definición 3.16. Una **resolución injectiva** de un R -módulo A es un complejo exacto en $R\text{-Mod}$, de la forma

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\eta} Q^0 \xrightarrow{d^1} Q^1 \xrightarrow{d^2} Q^2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow Q^n \xrightarrow{d^n} Q^{n+1} \longrightarrow \cdots \quad (3.7)$$

donde cada Q^r es un R -módulo injectivo. Se escribe $A \xrightarrow{\eta} Q^\bullet$ para denotar esa circunstancia.

Más generalmente, dícese que una categoría abeliana \mathbf{C} **posee suficientes injectivos** si para cada objeto $A \in \mathbf{C}$ hay un monomorfismo $j: A \rightarrow Q$ donde Q es un objeto injectivo. Se define resoluciones injectivas en \mathbf{C} de la misma manera. \diamond

⁴Un grupo abeliano B es un *grupo de torsión* si para cada $b \in B$ hay $n \in \mathbb{N}^\times$ con $nb = 0$. En un grupo abeliano cualquiera A , los elementos de orden finito forman un subgrupo $B \leq A$ (su **subgrupo de torsión**) y el cociente A/B es libre. Este resultado se generaliza la categoría $R\text{-mod}$ cuando R es un anillo principal.

Escolio 3.17. Sea $v: B \rightarrow A$ un R -homomorfismo. Si $B \xrightarrow{\theta} C^\bullet$ es un complejo acíclico⁵ y si $A \xrightarrow{\eta} Q^\bullet$ es un complejo inyectivo, entonces hay un morfismo de complejos $v^\bullet: C^\bullet \rightarrow Q^\bullet$ que **extiende** v , es decir, $v^0 \theta = \eta v: B \rightarrow Q^0$, de modo que este diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{\theta} & C^0 & \xrightarrow{\delta^0} & C^1 & \xrightarrow{\delta^1} & C^2 & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow v & & \downarrow v^0 & & \downarrow v^1 & & \downarrow v^2 & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\eta} & Q^0 & \xrightarrow{d^0} & Q^1 & \xrightarrow{d^1} & Q^2 & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Dos morfismos de complejos de cocadenas $C^\bullet \rightarrow Q^\bullet$ que extienden v son homotópicos.

En particular, si $A \xrightarrow{\eta} Q^\bullet$ y $A \xrightarrow{\theta} Q'^\bullet$ son dos resoluciones inyectivas de un R -módulo A , entonces los complejos de cocadenas Q^\bullet y Q'^\bullet son homotópicamente equivalentes y por lo tanto poseen grupos de cohomología isomorfos. \square

3.3 Funtores derivados

La disponibilidad de resoluciones proyectivas e inyectivas en la categoría abeliana $R\text{-Mod}$ da lugar a dos familias importantes de funtores, al componer un funtor dado con los funtores de homología o cohomología encontrados en el capítulo 1. Si el funtor dado es exacto, lleva el complejo exacto de una resolución a otro complejo exacto, con homología o cohomología trivial; con eso no se gana nada. Pero si el funtor dado no es exacto, la composición proporciona grupos de co/homología que pueden aportar información interesante.

Definición 3.18. Sean C y D dos categorías abelianas donde C posee suficientes proyectivos. Sea $\mathcal{F}: C \rightarrow D$ un funtor aditivo covariante. Si $A \in C$, sea $P_\bullet \xrightarrow{\pi} A$ una resolución proyectiva de A en C . La imagen bajo \mathcal{F} del complejo (P_\bullet, d) en C es un complejo de cadenas $(\mathcal{F}P_\bullet, \mathcal{F}d)$ en D , no necesariamente exacto. Para cada $n \in \mathbb{N}$, se define el n -ésimo **funtor derivado izquierdo** $\mathcal{L}_n \mathcal{F}: C \rightarrow \text{Ab}$ por

$$\mathcal{L}_n \mathcal{F}(A) := H_n(\mathcal{F}P_\bullet).$$

Sea $\mathcal{G}: C^\circ \rightarrow D$ un funtor aditivo contravariante. La imagen bajo \mathcal{G} del complejo (P_\bullet, d) en C° es un complejo de cocadenas $(\mathcal{G}P^\bullet, \mathcal{G}d)$ en D , no necesariamente exacto. Para cada $n \in \mathbb{N}$, se define el n -ésimo **funtor derivado derecho** $\mathcal{R}^n \mathcal{G}: C^\circ \rightarrow \text{Ab}$ por

$$\mathcal{R}^n \mathcal{G}(A) := H^n(\mathcal{G}P^\bullet). \quad \diamond$$

Hay dos otras familias de funtores derivados obtenidas con el empleo de resoluciones inyectivas en lugar de proyectivas.

⁵Un complejo de cocadenas C^\bullet es *acíclico* si $H^n(C) = 0$ para $n \geq 1$.

Definición 3.19. Sean \mathcal{C} y \mathcal{D} dos categorías abelianas donde \mathcal{C} posee suficientes injectivos.⁶ Sea $\mathcal{F}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un funtor aditivo covariante. Si $A \in \mathcal{C}$, sea $A \xrightarrow{\eta} Q^\bullet$ una resolución injectiva de A . Para cada $n \in \mathbb{N}$, se define el n -ésimo funtor derivado *derecho* $\mathcal{R}^n \mathcal{F}: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ab}$ por $\mathcal{R}^n \mathcal{F}(A) := H^n(\mathcal{F}Q^\bullet)$.

Sea $\mathcal{G}: \mathcal{C}^\circ \rightarrow \mathcal{D}$ un funtor aditivo contravariante. Para cada $n \in \mathbb{N}$, se define el n -ésimo funtor derivado *izquierdo* $\mathcal{L}_n \mathcal{G}: \mathcal{C}^\circ \rightarrow \mathbf{Ab}$ por $\mathcal{L}_n \mathcal{G}(A) := H_n(\mathcal{G}Q^\bullet)$. \diamond

El Corolario 3.14 implica que los funtores derivados $\mathcal{L}_n \mathcal{F}$ y $\mathcal{R}^n \mathcal{G}$ son bien definidas, porque los grupos abelianos $H_n(\mathcal{F}P_\bullet)$ y $H^n(\mathcal{G}P^\bullet)$ solo dependen del objeto original A , hasta un isomorfismo natural. Para calcular tales grupos, se debe usar la resolución proyectiva más apropiada en cada caso.

Lema 3.20. Si el funtor aditivo covariante $\mathcal{F}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ es exacto a la derecha, hay un isomorfismo natural $\iota: \mathcal{L}_0 \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{F}$.

Demostración. Si $P_\bullet \xrightarrow{\pi} A$ es una resolución proyectiva de $A \in \mathcal{C}$ y si \mathcal{F} es exacto a la derecha, entonces la sucesión $P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\pi} A \rightarrow 0$ es exacta en \mathcal{C} y $\mathcal{F}P_1 \xrightarrow{\mathcal{F}d_1} \mathcal{F}P_0 \xrightarrow{\mathcal{F}\pi} \mathcal{F}A \rightarrow 0$ también es exacta en \mathcal{D} .

Fíjese que $H_0(\mathcal{F}P_\bullet) = \text{coker}(\mathcal{F}d_1)$ por la definición de H_0 (esta es el grupo de homología del complejo truncado $\cdots \rightarrow \mathcal{F}P_1 \xrightarrow{\mathcal{F}d_1} \mathcal{F}P_0 \rightarrow 0$ (sin el objeto $\mathcal{F}A$) en la posición de $\mathcal{F}P_0$). En la factorización canónica (2.15) para el epimorfismo $\mathcal{F}\pi = j_A p_A: \mathcal{F}P_0 \twoheadrightarrow \mathcal{F}A$, el factor $p_A: \mathcal{F}P_0 \rightarrow H_0(\mathcal{F}P_\bullet)$ es el epimorfismo canónico del conúcleo y $j_A: H_0(\mathcal{F}P_\bullet) \rightarrow \mathcal{F}A$ es un isomorfismo.

Sea $u: A \rightarrow B$ un morfismo en \mathcal{C} y sea $C_\bullet \xrightarrow{\rho} B$ una resolución proyectiva de B . Por la Proposición 3.13, hay un morfismo de complejos $u_\bullet: P_\bullet \rightarrow C_\bullet$ que levanta u al estilo de (3.6). El epimorfismo $\mathcal{F}\rho = j_B p_B: \mathcal{F}C_0 \twoheadrightarrow \mathcal{F}B$ se factoriza de la misma forma que $\mathcal{F}\pi$, con $p_B: \mathcal{F}C_0 \rightarrow H_0(\mathcal{F}C_\bullet)$ y $j_B: H_0(\mathcal{F}C_\bullet) \rightarrow \mathcal{F}B$ un isomorfismo; y vale $\mathcal{F}\rho \mathcal{F}u_0 = \mathcal{F}u \mathcal{F}\pi$:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathcal{F}\pi & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
 \mathcal{F}P_0 & \xrightarrow{p_A} & H_0(\mathcal{F}P_\bullet) & \xrightarrow{j_A} & \mathcal{F}A \\
 \mathcal{F}u_0 \downarrow & & \downarrow v & & \downarrow \mathcal{F}u \\
 \mathcal{F}C_0 & \xrightarrow{p_B} & H_0(\mathcal{F}C_\bullet) & \xrightarrow{j_B} & \mathcal{F}B \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & & \mathcal{F}\rho & &
 \end{array}$$

Como j_A, j_B son isomorfismos, hay un único homomorfismo $v: H_0(\mathcal{F}P_\bullet) \rightarrow H_0(\mathcal{F}C_\bullet)$ que hace conmutar el cuadrado derecho, $v = j_B^{-1} \mathcal{F}u j_A$. Entonces

$$j_B v p_A = \mathcal{F}u j_A p_A = \mathcal{F}u \mathcal{F}\pi = \mathcal{F}\rho \mathcal{F}u_0 = j_B p_B \mathcal{F}u_0$$

⁶Fíjese que \mathcal{C} posee suficientes injectivos si y solo si la categoría opuesta \mathcal{C}° posee suficientes proyectivos.

y por ende $v p_A = p_B \mathcal{F} u_0$ porque j_B es un monomorfismo. Esto dice que el cuadrado izquierdo conmuta. Como p_A, p_B son aplicaciones de conúcleo, el único homomorfismo que hace conmutar el cuadrado izquierdo es $H_0(\mathcal{F} u_0)$; así que $v = H_0(\mathcal{F} u_0) = \mathcal{L}_0 \mathcal{F} u$. Se ha comprobado que $j_B \mathcal{L}_0 \mathcal{F} u = \mathcal{F} u j_A$. Esta última relación dice que los isomorfismos j_A, j_B son componentes de un isomorfismo natural $\iota: \mathcal{L}_0 \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{F}$. \square

Definición 3.21. Sea A un R -módulo derecho y B un R -módulo izquierdo. El producto tensorial $A \otimes_R B$ es un grupo abeliano; y para B fijo, la correspondencia $A \mapsto A \otimes_R B$ es un funtor aditivo covariante $(- \otimes_R B) : \text{Mod-}R \rightarrow \text{Ab}$ exacto a la derecha, por el Lema 2.75. Para $n \in \mathbb{N}$, el n -ésimo **producto de torsión** de A y B se define como

$$\text{Tor}_n^R(A, B) := \mathcal{L}_n(- \otimes_R B)(A). \quad (3.8)$$

Del Lema 3.20, resulta que $\text{Tor}_0^R(A, B) = A \otimes_R B$. \diamond

Ejemplo 3.22. En la categoría $\text{Ab} = \mathbb{Z}\text{-Mod}$, el grupo abeliano \mathbb{Z}/m tiene la resolución proyectiva del Ejemplo 3.15:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times m} \mathbb{Z} \xrightarrow{q} \mathbb{Z}/m \longrightarrow 0 \quad (3.9)$$

Si G es un grupo abeliano cualquiera, el complejo $G \otimes_{\mathbb{Z}} P_{\bullet}$ es

$$0 \longrightarrow G \xrightarrow{\times m} G \longrightarrow 0$$

al emplear el isomorfismo (natural) $G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \simeq G$ y al notar que $(\times m)_{\#} = (\times m) : x \mapsto mx$ como un endomorfismo de G . La homología de este complejo es

$$\text{Tor}_0^{\mathbb{Z}}(G, \mathbb{Z}/m) = G/mG, \quad \text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(G, \mathbb{Z}/m) = \{x \in G : mx = 0\} \leq G,$$

y $\text{Tor}_n^{\mathbb{Z}}(G, \mathbb{Z}/m) = 0$ para $n \geq 2$. \diamond

Escolio 3.23. Si el funtor aditivo contravariante $\mathcal{G} : \mathcal{C}^{\circ} \rightarrow \mathcal{D}$ es exacto a la izquierda, hay un isomorfismo natural $\mathcal{R}^0 \mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{G}$. \boxminus

Definición 3.24. Sea B un R -módulo izquierdo.⁷ La correspondencia $A \mapsto \text{Hom}_R(A, B)$ es un funtor aditivo contravariante y exacto a la izquierda, por el Lema 2.67. Para $n \in \mathbb{N}$, el n -ésimo **extensión** de B por A se define como

$$\text{Ext}_R^n(A, B) := \mathcal{R}^n \text{Hom}_R(-, B)(A). \quad (3.10)$$

Del Escolio 3.23, resulta que $\text{Ext}_R^0(A, B) = \text{Hom}_R(A, B)$. \diamond

⁷Esta definición es directamente aplicable, *mutatis mutandis*, a los R -módulos derechos.

Si G es un grupo abeliano, al aplicar el funtor $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, G)$ a la resolución proyectiva (3.9) de \mathbb{Z}/m , habida cuenta de que $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, G) \simeq G$, se obtiene

$$0 \longrightarrow G \xrightarrow{\times m} G \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

porque $(\times m)^* = (\times m)$ como endomorfismo de G . La cohomología de este complejo es

$$\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^0(\mathbb{Z}/m, G) = \{x \in G : mx = 0\} \leqslant G, \quad \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(\mathbb{Z}/m, G) = G/mG,$$

y $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^n(\mathbb{Z}/m, G) = 0$ para $n \geqslant 2$.

► Los funtores derivados Tor_n^R y Ext_R^n aparecen en ciertas sucesiones exactas largas, al combinarlos con una sucesión exacta corta de R -módulos. Brevemente, una sucesión exacta corta $0 \longrightarrow A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \longrightarrow 0$ en $R\text{-Mod}$ produce otra SEC en $R\text{-Comp}$ entre sus resoluciones proyectivas; luego se aplica el Teorema 1.29.

Lema 3.25 (Lema de la herradura). *Sea $0 \longrightarrow A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \longrightarrow 0$ una sucesión exacta corta de R -módulos, con resoluciones proyectivas dadas $P_{\bullet} \xrightarrow{\pi} A$ y $R_{\bullet} \xrightarrow{\rho} C$. Entonces hay una resolución proyectiva $Q_{\bullet} \xrightarrow{\kappa} B$ tal que $0 \longrightarrow P_{\bullet} \xrightarrow{u_{\bullet}} Q_{\bullet} \xrightarrow{v_{\bullet}} R_{\bullet} \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta corta de complejos:*

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \cdots & \longrightarrow & P_2 & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & P_0 & \xrightarrow{\pi} A \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow j_0 & & \downarrow u \\
 \cdots & \dashrightarrow & Q_2 & \dashrightarrow & Q_1 & \dashrightarrow & Q_0 & \xrightarrow{\kappa} B \dashrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow p_0 & \nearrow \sigma & \downarrow v \\
 \cdots & \longrightarrow & R_2 & \longrightarrow & R_1 & \longrightarrow & R_0 & \xrightarrow{\rho} C \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array} \tag{3.11}$$

Demostración. Por la Proposición 3.4, una sucesión exacta corta $0 \longrightarrow P_n \longrightarrow Q_n \longrightarrow R_n \longrightarrow 0$ con R_n proyectivo debe escindir, y por ende $Q_n \simeq P_n \oplus R_n$. Entonces, sin perder generalidad, se puede definir $Q_n := P_n \oplus R_n$. Sean $j_n: P_n \hookrightarrow Q_n$ la inyección y $p_n: Q_n \twoheadrightarrow R_n$ la proyección asociada a esta suma directa. Ellas forman las flechas verticales en el diagrama (3.11).

Como R_0 es proyectivo, se puede levantar $\rho: R_0 \rightarrow C$ a través del epimorfismo $v: B \rightarrow C$, para obtener $\sigma: R_0 \rightarrow B$ tal que $v \sigma = \rho$. Defínase $\kappa: Q_0 \rightarrow B$ por $\kappa(x, y) := u\pi(x) + \sigma(y)$ para $x \in P_0$, $y \in R_0$. Entonces $\kappa j_0 = u\pi$ y $v \kappa = \rho p_0$: los dos cuadrados a la derecha del diagrama conmutan.

Obsérvese que cada Q_n es un R -módulo proyectivo. Como π y ρ son épicos, el Lema de cinco corto (Corolario 1.20) implica que κ es también un epimorfismo.

Ahora se puede repetir esta construcción, por inducción sobre n , para construir los morfismos $Q_n \rightarrow Q_{n-1}$ que hacen conmutar los otros cuadrados del diagrama y comprobar que la fila central es una sucesión exacta. \square

Una categoría abeliana \mathcal{C} puede ser encajada como una categoría plena de $R\text{-Mod}$ para un anillo R apropiada, según el teorema de Freyd y Mitchell.⁸ Entonces el lema de la herradura sigue válido en cualquier categoría abeliana. \llbracket La demostración anterior es directamente aplicable en la categoría \mathcal{C} , con la excepción de la fórmula $\kappa(x, y) := u\pi(x) + \sigma(y)$ que define el morfismo κ . Para definir κ sin usar esta fórmula puntual, sea $p'_0: Q_0 \rightarrow P_0$ el otro epimorfismo de la suma directa $P_0 \oplus R_0$. Entonces la fórmula $\kappa := u\pi p'_0 + \sigma p_0 \in \mathcal{C}(Q_0, B)$ define κ directamente en $\text{Mor}(\mathcal{C})$. \rrbracket

Teorema 3.26. *Sea $0 \rightarrow A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \rightarrow 0$ una sucesión exacta corta en una categoría abeliana \mathcal{C} con suficientes proyectivos.*

- (a) *Sea $\mathcal{F}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un funtor aditivo covariante hacia otra categoría abeliana. Entonces hay una sucesión exacta larga*

$$\cdots \rightarrow \mathcal{L}_{n+1}\mathcal{F}(C) \xrightarrow{\partial_{n+1}} \mathcal{L}_n\mathcal{F}(A) \xrightarrow{\mathcal{F}u_n} \mathcal{L}_n\mathcal{F}(B) \xrightarrow{\mathcal{F}v_n} \mathcal{L}_n\mathcal{F}(C) \xrightarrow{\partial_n} \mathcal{L}_{n-1}\mathcal{F}(A) \rightarrow \cdots$$

$$\text{que termina con } \cdots \rightarrow \mathcal{L}_1\mathcal{F}(C) \xrightarrow{\partial_1} \mathcal{L}_0\mathcal{F}(A) \xrightarrow{\mathcal{F}u_0} \mathcal{L}_0\mathcal{F}(B) \xrightarrow{\mathcal{F}v_0} \mathcal{L}_0\mathcal{F}(C) \rightarrow 0.$$

- (b) *Sea $\mathcal{G}: \mathcal{C}^\circ \rightarrow \mathcal{D}$ un funtor aditivo contravariante hacia otra categoría abeliana. Entonces hay una sucesión exacta larga*

$$\cdots \rightarrow \mathcal{R}^{n-1}\mathcal{G}(A) \xrightarrow{\partial^{n-1}} \mathcal{R}^n\mathcal{G}(C) \xrightarrow{\mathcal{G}v^n} \mathcal{R}^n\mathcal{G}(B) \xrightarrow{\mathcal{G}u^n} \mathcal{R}^n\mathcal{G}(A) \xrightarrow{\partial^n} \mathcal{R}^{n+1}\mathcal{G}(C) \rightarrow \cdots$$

$$\text{que empieza con } 0 \rightarrow \mathcal{R}^0\mathcal{G}(C) \xrightarrow{\mathcal{G}v^0} \mathcal{R}^0\mathcal{G}(B) \xrightarrow{\mathcal{G}u^0} \mathcal{R}^0\mathcal{G}(A) \xrightarrow{\partial^0} \mathcal{R}^1\mathcal{G}(C) \rightarrow \cdots.$$

Demostración. Basta demostrar la parte (a), porque la parte (b) sigue al aplicar los mismos argumentos a la categoría opuesta.

Sean $P_\bullet \xrightarrow{\pi} A$ y $R_\bullet \xrightarrow{\rho} C$ dos resoluciones proyectivas de A y C respectivamente. Del Lema 3.25 se sabe que hay otra $Q_\bullet \xrightarrow{\kappa} B$ tal que $0 \rightarrow P_\bullet \xrightarrow{u_\bullet} Q_\bullet \xrightarrow{v_\bullet} R_\bullet \rightarrow 0$ es una sucesión exacta corta de complejos de cadenas sobre \mathcal{C} .⁹

Al aplicar el funtor aditivo \mathcal{F} a la sucesión exacta *escindida* $0 \rightarrow P_n \rightarrow Q_n \rightarrow R_n \rightarrow 0$, en vista de que $\mathcal{F}Q_n = \mathcal{F}(P_n \oplus R_n) = \mathcal{F}(P_n) \oplus \mathcal{F}(R_n)$, se obtiene una sucesión exacta escindida

⁸Para su demostración, véase la sección 1.6 del libro de Weibel.

⁹Si \mathcal{C} es una categoría abeliana, la categoría $\text{Comp-}\mathcal{C}$ de complejos de cadenas en \mathcal{C} es también abeliana.

$0 \longrightarrow \mathcal{F}P_n \longrightarrow \mathcal{F}Q_n \longrightarrow \mathcal{F}R_n \longrightarrow 0$ en \mathcal{D} . En consecuencia, una aplicación del Teorema 1.29 a esta SEC de complejos define los morfismos conectores $\partial_n: H_n(\mathcal{F}R_\bullet) \rightarrow H_{n-1}(\mathcal{F}P_\bullet)$ y así produce la sucesión exacta larga deseada. \square

Corolario 3.27. (a) Sea $0 \longrightarrow A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \longrightarrow 0$ una sucesión exacta corta de R -módulos derechos. Si D es un R -módulo izquierdo, entonces hay una sucesión exacta larga en homología:

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Tor}_n^R(A, D) \longrightarrow \mathrm{Tor}_n^R(B, D) \longrightarrow \mathrm{Tor}_n^R(C, D) \xrightarrow{\partial_n} \mathrm{Tor}_{n-1}^R(A, D) \longrightarrow \cdots$$

que termina con

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(C, D) \xrightarrow{\partial_1} A \otimes_R D \longrightarrow B \otimes_R D \longrightarrow C \otimes_R D \longrightarrow 0. \quad (3.12)$$

(b) Sea $0 \longrightarrow A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \longrightarrow 0$ una sucesión exacta corta de R -módulos izquierdos. Si D es otro R -módulo izquierdo, entonces hay una sucesión exacta larga en cohomología:

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^n(C, D) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^n(B, D) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^n(A, D) \xrightarrow{\delta^n} \mathrm{Ext}_R^{n+1}(C, D) \longrightarrow \cdots$$

que empieza con

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(C, D) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(B, D) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(A, D) \xrightarrow{\delta^0} \mathrm{Ext}_R^1(C, D) \longrightarrow \cdots \quad (3.13)$$

Demostración. Aplíquese el teorema anterior a los funtores respectivos $\mathcal{F} = (- \otimes_R D)$ y $\mathcal{G} = \mathrm{Hom}_R(-, D)$, tomando en cuenta que $\mathrm{Tor}_0^R(-, D) = (- \otimes_R D)$ y $\mathrm{Ext}_R^0(-, D) = \mathrm{Hom}_R(-, D)$. \square

Los extremos de estas sucesiones exactas largas motivan estos funtores derivados. El funtor covariante $(- \otimes_R D)$ es exacto a la derecha pero no a la izquierda. Los funtores $\mathrm{Tor}_n^R(-, D)$ entonces proporcionan una especie de resolución que exhibe su falta de exactitud a la izquierda. El funtor contravariante $\mathrm{Hom}_R(-, D)$ es exacto a la izquierda pero no a la derecha. Los $\mathrm{Ext}_R^n(-, D)$ ofrecen una resolución que exhibe su falta de exactitud a la derecha.

3.4 Extensiones de R -módulos

La teoría de extensiones fue formulado originalmente para grupos: dados dos grupos H y K , ¿cuáles grupos G tienen H como subgrupo normal y K como grupo cociente, de modo que $G/H \simeq K$? Un grupo G con estas cualidades se llama una *extensión de K por H* ; en general, G no es única (hasta isomorfismo). Por ejemplo, si $H \simeq C_3$ y $K \simeq C_2$ son grupos cíclicos de órdenes 3 y 2, entonces $G \simeq C_6$ y $G \simeq S_3$ son dos soluciones (y desde luego, no hay otras).

Obsérvese que $1 \longrightarrow H \longrightarrow G \longrightarrow K \longrightarrow 1$ es una sucesión exacta en la categoría Grp si y solo si G es una extensión de K por H . La clasificación se complica porque la categoría Grp no es abeliana. En categorías de R -módulos, esta clasificación resulta más amena.

Definición 3.28. Una **extensión** de un R -módulo A por otro R -módulo B es una sucesión exacta corta en $R\text{-Mod}$:¹⁰

$$\underline{E}: \quad 0 \longrightarrow B \xrightarrow{j} E \xrightarrow{p} A \longrightarrow 0. \quad (3.14)$$

Hay isomorfismos obvios $B \simeq j(B) \subseteq E$ y $E/j(B) \simeq A$. Un ejemplo es la *extensión escindida*:

$$\underline{E}_0: \quad 0 \longrightarrow B \xrightarrow{j_2} A \oplus B \xrightarrow{p_1} A \longrightarrow 0. \quad (3.15)$$

Un *equivalencia de extensiones* de A por B es un diagrama conmutativo de cadena de la forma

$$\begin{array}{ccccccccc} \underline{E}: & 0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{j} & E & \xrightarrow{p} & A & \longrightarrow & 0 \\ & & & \parallel & & \downarrow f & & \parallel & & \\ \underline{E}': & 0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{j'} & E' & \xrightarrow{p'} & A & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

determinado por un R -homomorfismo $f: E \rightarrow E'$ que cumple $fj = j'$ y $p'f = p$. Por el Lema de cinco corto (Corolario 1.20), un tal f es necesariamente un *isomorfismo*. Dos extensiones de A por B se llaman *equivalentes* si hay un (iso)morfismo entre ellas. Denótese por $\underline{\mathcal{E}}(A, B)$ el conjunto de clases de equivalencia de extensiones de A por B . \diamond

Una extensión escinde si y solo si es equivalente a \underline{E}_0 ; es decir, $[\underline{E}_0] \in \underline{\mathcal{E}}(A, B)$ es la clase de extensiones escindidas.

Lema 3.29. Si $\text{Ext}_R^1(A, B) = 0$, entonces cada extensión de A por B escinde.

Demostración. La sucesión exacta corta (3.14) de la extensión da lugar a la sucesión exacta larga (3.13):

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_R(A, B) \xrightarrow{p^*} \text{Hom}_R(E, B) \xrightarrow{j^*} \text{Hom}_R(B, B) \xrightarrow{\delta} \text{Ext}_R^1(A, B) \longrightarrow \dots$$

Al ser $\text{Ext}_R^1(A, B) = 0$, el homomorfismo j^* es sobreyectivo, así que hay $t \in \text{Hom}_R(E, B)$ tal que $1_B = j^*(t) = tj$. El Lema 3.1 entonces dice que esta SEC escinde. \square

Lema 3.30. Dadas dos R -módulos A y B , hay una biyección $\underline{\mathcal{E}}(A, B) \leftrightarrow \text{Ext}_R^1(A, B)$ que lleva la clase escindida $[\underline{E}_0] \in \underline{\mathcal{E}}(A, B)$ en el cero del grupo abeliano $\text{Ext}_R^1(A, B)$.

¹⁰Casi todos los autores siguen esta terminología de llamar la SEC (3.14) una extensión “de A por B ”. Una excepción notable es MacLane, que la llama una extensión “de B por A ”. *Caveat lector*.

Demostración. Tómesese una resolución proyectiva $P_\bullet \xrightarrow{\pi} A$. Una extensión E dada por la sucesión exacta (3.14) da lugar, por la Proposición 3.13, a un morfismo de complejos que levanta 1_A :

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & P_2 & \xrightarrow{d_2} & P_1 & \xrightarrow{d_1} & P_0 & \xrightarrow{\pi} & A \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow u_1 & & \downarrow u_0 & & \downarrow 1_A \\ \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{j} & E & \xrightarrow{p} & A \longrightarrow 0 \end{array}$$

Al reemplazar P_1 por $K := \ker \pi = \operatorname{im} d_1$, se obtiene un morfismo de sucesiones exactas cortas:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{i} & P & \xrightarrow{\pi} & A \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow v & & \downarrow u & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{j} & E & \xrightarrow{p} & A \longrightarrow 0 \end{array}$$

donde $P := P_0$, $u := u_0$, $i: K \hookrightarrow P$ es la inclusión, y $v: K \rightarrow B$ es el único R -homomorfismo tal que $jv = ui$, puesto que $pu i = \pi i = 0$ y (B, j) es un núcleo para p .

Como P es proyectivo, se ve que $\operatorname{Ext}_R^1(P, B) = 0$ al usar la resolución proyectiva $P_\bullet \xrightarrow{1_P} P$ del Ejemplo 3.15. Al aplicar el funtor $\operatorname{Hom}_R(-, B)$ a la fila superior, el Corolario 3.27(b) da la sucesión exacta:

$$\operatorname{Hom}_R(P, B) \xrightarrow{i^*} \operatorname{Hom}_R(K, B) \xrightarrow{\delta} \operatorname{Ext}_R^1(A, B) \longrightarrow 0.$$

Defínase $\theta_{AB}: \mathcal{E}(A, B) \rightarrow \operatorname{Ext}_R^1(A, B)$ por $\theta_{AB}([E]) := \delta(v)$. Entonces θ_{AB} está bien definida: para otros $u': P \rightarrow E$ y $v': K \rightarrow B$ que levantan 1_A , se ve que $p(u - u') = \pi - \pi = 0$, así que $u - u' = js$ para algún $s: P \rightarrow B$; además $j(v - v') = (u - u')i = js i$ así que $v - v' = si = i^*(s)$ y por ende $\delta(v - v') = 0$.

Por otro lado, si $x \in \operatorname{Ext}_R^1(A, B)$, hay $v \in \operatorname{Hom}_R(K, B)$ con $\delta(v) = x$. Sea (F, w, h) el pushout del diagrama $B \xleftarrow{v} K \xrightarrow{i} P$; entonces hay un diagrama conmutativo con filas exactas:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{i} & P & \xrightarrow{\pi} & A \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow v & & \downarrow w & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{h} & F & \xrightarrow{q} & A \longrightarrow 0. \end{array}$$

Del Ejercicio 2.12, $F = \operatorname{coker} k$ donde $k: K \rightarrow P \oplus B: z \mapsto (i(z), -v(z))$ y se toma $q: F \rightarrow A: [y, b] \mapsto \pi(y)$. Entonces la fila de abajo es una extensión \underline{F} de A por B , y por su construcción, se obtiene $\theta_{AB}([\underline{F}]) = \delta(v) = x$.

La extensión $[E]$ escinde si y solo si existe $t: E \rightarrow B$ tal que $tj = 1_B$; en cuyo caso $v = tjv = tui = i^*(tu) \in \operatorname{im} i^* = \ker \delta$. Esto dice que $\theta_{AB}([E_0]) = 0$ en $\operatorname{Ext}_R^1(A, B)$. \square

La biyección $\theta_{AB}: \mathcal{E}(A, B) \rightarrow \operatorname{Ext}_R^1(A, B)$ del Lema 3.30 es natural en A y en B , en vista del resultado siguiente.

Lema 3.31. Sea \underline{E} una extensión de A por B en $R\text{-Mod}$.

- (a) Para cada R -homomorfismo $f: B \rightarrow B'$, hay una extensión \underline{E}' de A por B' que hace conmutar el diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{j} & E & \xrightarrow{p} & A \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f & & \downarrow u & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & B' & \xrightarrow{j'} & E' & \xrightarrow{p'} & A \longrightarrow 0 \end{array}$$

- (b) Para cada R -homomorfismo $g: A'' \rightarrow A$, hay una extensión \underline{E}'' de A'' por B que hace conmutar el diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{j''} & E'' & \xrightarrow{p''} & A'' \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow v & & \downarrow g \\ 0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{j} & E & \xrightarrow{p} & A \longrightarrow 0 \end{array}$$

- (c) Las asignaciones $\mathcal{E}(A, f) \equiv f \circ [\underline{E}] := [\underline{E}']$ y $\mathcal{E}(g, B) \equiv [\underline{E}] \circ g := [\underline{E}'']$ definen un bifunctor $\mathcal{E}(-, -) : R\text{-Mod}^\circ \times R\text{-Mod} \rightarrow \text{Set}$.

Demostración. Ad (a): Defínase (E', j', u) como el pushout del diagrama $B' \xleftarrow{f} B \xrightarrow{j} E$. Entonces $j': B' \rightarrow E'$ es un monomorfismo al igual que j ; y $uj = j'f$. El triple $(A, 0, p)$ cumple $pj = 0f: B \rightarrow A$ trivialmente. Por la propiedad universal del pushout, hay un único R -homomorfismo $p': E' \rightarrow A$ tal que $p'u = p$ y $p'j' = 0$; el diagrama es conmutativo.

Se comprueba fácilmente que la segunda fila es exacta y así define una extensión \underline{E}' . También es fácil ver que la clase de equivalencia $[\underline{E}']$ solo depende de la clase $[\underline{E}]$.

Ad (b): Defínase (E'', p'', v) como el pullback del diagrama $A'' \xrightarrow{g} A \xleftarrow{p} E$. Entonces $p'': E'' \rightarrow A''$ es un epimorfismo al igual que p ; y $pv = gp''$. El triple $(B, 0, j)$ cumple $pj = g0: B \rightarrow A$ trivialmente. Por la propiedad universal del pullback, hay un único R -homomorfismo $j'': B \rightarrow E''$ tal que $v j'' = j$ y $p'' j'' = 0$; el diagrama es conmutativo.

Se comprueba fácilmente que la primera fila es exacta y así define una extensión \underline{E}'' ; y la clase de equivalencia $[\underline{E}'']$ solo depende de la clase $[\underline{E}]$.

Ad (c): Para comprobar la funtorialidad de $\mathcal{E}(A, -)$ y $\mathcal{E}(-, B)$, se debe iterar estas dos construcciones para R -homomorfismos compuestos. Dos cálculos directos pero tediosos muestran que $hf \circ [\underline{E}] = h \circ (f \circ [\underline{E}])$ y $[\underline{E}] \circ gk = ([\underline{E}] \circ g) \circ k$, así que $\mathcal{E}(-, -)$ es contravariante en la primera variable y covariante en la segunda variable. Además se puede comprobar que $(f \circ [\underline{E}]) \circ g = f \circ ([\underline{E}] \circ g)$ en $\mathcal{E}(A'', B')$, lo cual demuestra que $\mathcal{E}(-, -)$ es un bifunctor. \square

Los dos lemas anteriores definen un isomorfismo natural $\theta: \mathcal{E}(-, -) \Rightarrow \text{Ext}_R^1(-, -)$. El segundo de estos bifuntores toma valores en Ab y no solo en Set . Entonces cada conjunto $\mathcal{E}(A, B)$ es un grupo abeliano, cuyo cero es la clase de la extensión escindida.

Definición 3.32 (Suma de Baer). Dadas dos extensiones de A por B en $R\text{-Mod}$:

$$\underline{E}: 0 \longrightarrow B \xrightarrow{j} E \xrightarrow{p} A \longrightarrow 0 \quad \text{y} \quad \underline{F}: 0 \longrightarrow B \xrightarrow{k} F \xrightarrow{q} A \longrightarrow 0,$$

su *suma directa*

$$\underline{E} \oplus \underline{F}: 0 \longrightarrow B \oplus B \xrightarrow{(j,k)} E \oplus F \xrightarrow{(p,q)} A \oplus A \longrightarrow 0,$$

es una extensión de $A \oplus A$ por $B \oplus B$. Los R -homomorfismos *diagonal* y *suma*,

$$\Delta_A: A \rightarrow A \oplus A: a \mapsto (a, a) \quad \text{y} \quad \nabla_B: B \oplus B \rightarrow B: (b_1, b_2) \mapsto b_1 + b_2$$

permiten reducirla a una extensión de A por B . Se define la **suma de Baer** $[\underline{E}] + [\underline{F}]$ así:

$$[\underline{E}] + [\underline{F}] := \nabla_B \circ (\underline{E} \oplus \underline{F}) \circ \Delta_A.$$

Esta operación es asociativa y conmutativa sobre $\mathcal{E}(A, B)$. Se puede verificar que la extensión $\nabla_B \circ (\underline{E} \oplus \underline{E}_0) \circ \Delta_A$ es equivalente a \underline{E} , así que $[\underline{E}] + [\underline{E}_0] = [\underline{E}]$. El negativo de $[\underline{E}]$ es $[\underline{E}^-]$, dado por $\underline{E}^-: 0 \longrightarrow B \xrightarrow{-j} E \xrightarrow{p} A \longrightarrow 0$. Con esta operación, $\mathcal{E}(A, B)$ es un grupo abeliano. \diamond

Un último ejercicio sobre extensiones asegura que la biyección $\theta_{AB}: \mathcal{E}(A, B) \rightarrow \text{Ext}_R^1(A, B)$ es un isomorfismo de grupos, porque entrelaza las dos operaciones de suma.

El resultado final de estos cálculos es la exhibición de una versión “concreta” del bifunctor derivado Ext_R^1 por las extensiones de R -módulos. Históricamente, tales extensiones con su relación de equivalencia y su suma, fueron estudiados por Baer mucho antes de la introducción de funtores derivados.¹¹

3.5 El teorema de Künneth

En su tesis doctoral en 1922, Künneth¹² obtuvo una fórmula que relaciona los números de Betti de una variedad producto $X \times Y$ y de sus dos factores:

$$b_k(X \times Y) = \sum_{j=0}^k b_j(X) b_{k-j}(Y).$$

¶ Si X es una variedad diferencial, el número de Betti $b_j(X)$ es la dimensión del espacio vectorial de j -formas cerradas módulo j -formas exactas. Poincaré dio una definición más general para complejos celulares en términos de homología; para 1922, era posible reformularla

¹¹La operación de suma de clases fue introducido en el artículo: Reinhold Baer, “Erweiterung von Gruppen und ihren Isomorphismen”, *Mathematische Zeitschrift* **38** (1934), 375–416.

¹²Hermann Künneth, *Über die Bettischen Zahlen einer Produktmannigfaltigkeit*, tesis doctoral, Universidad de Erlangen, 1922 (dirigido por Heinrich Tietze).

para espacios topológicos que admitían triangulaciones, que dio el contexto del trabajo de Künneth.] Posteriormente, Čech, Eilenberg y Steenrod reformularon esta relación en términos de complejas de cadenas de groups abelianos, en donde el lado derecho coincide con el lado izquierdo solamente si cierto “término de torsión” se anula.

A continuación se estudiará ciertas propiedades del producto tensorial. Un paso previo es el concepto de un *bicomplejo* o *complejo doble*, que tiene interés propio.

Definición 3.33. Un **bicomplejo** de cadenas es una familia $C_{\bullet\bullet} = \{C_{mn} : m, n \in \mathbb{N}\}$ de R -módulos, junto con R -homomorfismos $\delta_{mn} : C_{mn} \rightarrow C_{m-1,n}$ y $\partial_{mn} : C_{mn} \rightarrow C_{m,n-1}$ tales que

$$\delta_{mn}\delta_{m+1,n} = 0, \quad \partial_{mn}\partial_{m,n+1} = 0, \quad \delta_{m,n-1}\partial_{mn} + \partial_{m-1,n}\delta_{mn} = 0 \quad (3.16)$$

para todo $m, n \in \mathbb{N}$. (En la tercera relación, el lado izquierdo lleva C_{mn} en $C_{m-1,n-1}$.) Se suele suprimir los índices en las diferenciales, abreviando estas relaciones como $\delta\delta = 0$, $\partial\partial = 0$, $\delta\partial + \partial\delta = 0$. En particular, las filas $(C_{\bullet n}, \delta)$ y las columnas $(C_{m\bullet}, \partial)$ son complejos de cadenas. El **complejo total** $((\text{Tot } C)_{\bullet}, d)$ asociado a este bicomplejo se define así:

$$(\text{Tot } C)_r := \bigoplus_{m+n=r} C_{mn} = \bigoplus_{m=0}^r C_{m,r-m}, \quad d_r := \sum_{m+n=r} \delta_{mn} + \partial_{mn}. \quad (3.17)$$

De este modo, $d(C_{mn}) \subseteq C_{m-1,n} \oplus C_{m,n-1}$ y por ende $d((\text{Tot } C)_r) \subseteq (\text{Tot } C)_{r-1}$. Las relaciones (3.16) garantizan $d_r d_{r+1} = 0$, de manera que $((\text{Tot } C)_{\bullet}, d)$ es efectivamente un complejo de R -módulos. En el diagrama (cuyos cuadrados *anticonmutan*):

$$\begin{array}{ccccccc} & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ C_{03} & \xleftarrow{\delta_{13}} & C_{13} & \xleftarrow{\delta_{23}} & C_{23} & \xleftarrow{\delta_{33}} & C_{33} & \xleftarrow{\quad} \\ \partial_{03} \downarrow & & \partial_{13} \downarrow & & \partial_{23} \downarrow & & \partial_{33} \downarrow & \\ C_{02} & \xleftarrow{\delta_{12}} & C_{12} & \xleftarrow{\delta_{22}} & C_{22} & \xleftarrow{\delta_{32}} & C_{32} & \xleftarrow{\quad} \\ \partial_{02} \downarrow & & \partial_{12} \downarrow & & \partial_{22} \downarrow & & \partial_{32} \downarrow & \\ C_{01} & \xleftarrow{\delta_{11}} & C_{11} & \xleftarrow{\delta_{21}} & C_{21} & \xleftarrow{\delta_{31}} & C_{31} & \xleftarrow{\quad} \\ \partial_{01} \downarrow & & \partial_{11} \downarrow & & \partial_{21} \downarrow & & \partial_{31} \downarrow & \\ C_{00} & \xleftarrow{\delta_{10}} & C_{10} & \xleftarrow{\delta_{20}} & C_{20} & \xleftarrow{\delta_{30}} & C_{30} & \xleftarrow{\quad} \end{array} \quad (3.18)$$

los componentes de $(\text{Tot } C)_{\bullet}$ son las diagonales finitas y las diferenciales d_r están representadas por todas las flechas entre dos diagonales consecutivos. \diamond

Un *bicomplejo de cocadenas* se define de manera análoga. Las fórmulas de esta definición también definen un bicomplejo de objetos en cualquier categoría abeliana.

Definición 3.34. Sean C_\bullet y D_\bullet dos complejos en $\text{Comp-}R$ y $R\text{-Comp}$ respectivamente. Su *producto tensorial* $C_\bullet \otimes_R D_\bullet$ es el complejo total del bicomplejo con componentes $C_m \otimes_R D_n$ y con diferenciales $\delta_{mn} := d_m \otimes 1_{D_n}$ y $\partial_{mn} := 1_{C_m} \otimes (-1)^m d_n$. En otras palabras:

$$(C \otimes_R D)_r := \bigoplus_{m+n=r} C_m \otimes_R D_n = \bigoplus_{m=0}^r C_m \otimes_R D_{r-m},$$

$$d(x \otimes y) := dx \otimes y + (-1)^m x \otimes dy \quad \text{para } x \otimes y \in C_m \otimes_R D_n. \quad (3.19)$$

Entonces $((C \otimes_R D)_\bullet, d)$ es un complejo de grupos abelianos. \diamond

Vale la pena comprobar la nilpotencia del diferencial explícitamente en este caso:

$$\begin{aligned} d(d(x \otimes y)) &= d(dx \otimes y) + (-1)^m d(x \otimes dy) \\ &= d(dx) \otimes y + (-1)^{m-1} dx \otimes dy + (-1)^m dx \otimes dy + x \otimes d(dy) = 0. \end{aligned}$$

El signo que aparece en la fórmula (3.19) es una instancia de la llamada **regla de signos de Koszul**.¹³ Sean A, B, C, D grupos abelianos graduados (quizás con más estructura) y sean $f: A \rightarrow C, g: B \rightarrow D$ morfismos de grados $\#f, \#g$ respectivamente. Se define el morfismo $f \otimes g: A \otimes B \rightarrow C \otimes D$ sobre elementos homogéneos por:

$$\underline{f \otimes g}(a \otimes b) := (-1)^{\#g \#a} f(a) \otimes g(b). \quad (3.20)$$

Informalmente, el intercambio de orden de los símbolos g, a produce el signo $(-1)^{\#g \#a}$. (En la fórmula (3.19), nótese que $\#d = -1$ y $\#x = m$.)

La fórmula (3.19) tiene una consecuencia importante para la homología del producto tensorial de complejos. Si $x \in Z_m(C), y \in Z_n(D)$, entonces $d(x \otimes y) = 0$, es decir, $x \otimes y \in Z_{m+n}(C \otimes_R D)$. Si además $x = dz \in B_m(C)$, entonces $x \otimes y = d(z \otimes y) \in B_{m+n}(C \otimes_R D)$; alternativamente, si $y = dw \in B_n(D)$, entonces $x \otimes y = (-1)^m d(x \otimes w) \in B_{m+n}(C \otimes_R D)$. En consecuencia, hay un homomorfismo bien definido

$$\mu: H_m(C) \otimes_R H_n(D) \rightarrow H_{m+n}(C \otimes_R D) : [x] \otimes [y] \mapsto [x \otimes y]. \quad (3.21)$$

Un R -módulo derecho A da lugar a un *complejo trivial* A_\bullet con $A_0 = A$ y $A_n = 0$ para $n \neq 0$. De igual modo, un R -módulo izquierdo B puede identificarse con un complejo trivial $B_\bullet \in R\text{-Comp}$. Así se puede formar un par de complejos de grupos abelianos por $(A \otimes_R D)_r := A \otimes_R D_r$ con $d(a \otimes y) := a \otimes dy$ para $a \in A, y \in D_r$; y por $(C \otimes_R B)_r := C_r \otimes_R B$ con $d(x \otimes b) := dx \otimes b$ para $x \in C_r, b \in B$.

¹³Jean-Louis Koszul (1921–2018) fue uno de los grandes fundadores de la homología algebraica, comenzando por su tesis doctoral (dirigido por Henri Cartan): “Homologie et cohomologie des algèbres de Lie”, en 1949.

► Sea B un R - S -bimódulo. La Proposición 2.74 dice que el funtor $(- \otimes_R B)$ es el adjunto izquierdo del funtor $\text{Hom}_S(B, -)$; y el Lema 2.75 dice que este funtor $(- \otimes_R B)$ es exacto a derecha, en contraste con el funtor $\text{Hom}_S(B, -)$ que es exacto a izquierda (Lema 2.67). Ahora $\text{Hom}_S(B, -)$ es un funtor *exacto* si y solo si B es proyectivo como S -módulo derecho. La condición análoga sobre el funtor $(- \otimes_R B)$ da lugar a la definición siguiente.

Definición 3.35. Un R -módulo derecho A o un R -módulo izquierdo B es un **R -módulo plano** si el funtor $(A \otimes_R -) : R\text{-Mod} \rightarrow \text{Ab}$, o el funtor $(- \otimes_R B) : \text{Mod-}R \rightarrow \text{Ab}$ respectivamente, es exacto. \diamond

En vista de sucesión exacta (3.12) en el Corolario 3.27(a), se obtiene el siguiente criterio.

Escolio 3.36. $A \in \text{Mod-}R$ es plano si y solo si $\text{Tor}_1^R(A, B) = 0$ para todo $B \in R\text{-Mod}$. De igual manera, $B \in R\text{-Mod}$ es plano si y solo si $\text{Tor}_1^R(A, B) = 0$ para todo $A \in \text{Mod-}R$. \square

Lema 3.37. Un R -módulo proyectivo (izquierdo o derecho) es plano.

Demostración. Es fácil comprobar que el producto tensorial respeta sumas directas; es decir, $A \otimes (\bigoplus_j B_j) \simeq \bigoplus_j (A \otimes B_j)$ y también $(\bigoplus_k A_k) \otimes B \simeq \bigoplus_k (A_k \otimes B)$. Entonces $\bigoplus_k A_k$, respectivamente $\bigoplus_j B_j$, es plano si y solo si cada sumando es plano. Por lo tanto, basta comprobar que cada R -módulo libre es plano. Pero un R -módulo libre tiene la forma $R^{(J)} = \bigoplus_{j \in J} R$; basta entonces mostrar que R mismo, como R -módulo trivial (izquierdo o derecho), es plano. Esto es obvio, en vista de los isomorfismos $A \otimes_R R \simeq A$ y $R \otimes_R B \simeq B$, que muestran que $(R \otimes_R -) = 1_{R\text{-Mod}}$ y $(- \otimes_R R) = 1_{\text{Mod-}R}$. \square

Lema 3.38. Si (D_\bullet, d) es un complejo de cadenas de R -módulos izquierdos y si A es un R -módulo derecho plano, entonces $H_n(A \otimes_R D) \simeq A \otimes_R H_n(D)$.

Demostración. Como la homología de un complejo trivial es $H_0(A) = A$, el homomorfismo μ de (3.21) lleva $A \otimes_R H_n(D)$ en $H_n(A \otimes_R D)$. Basta verificar que este μ es un isomorfismo.

En el siguiente diagrama conmutativo, las filas y columnas son exactas:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \uparrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & B_n(D) & \xrightarrow{i} & Z_n(D) & \xrightarrow{p} & H_n(D) \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow q & & \downarrow j & & \\
 & & D_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & D_n & & \\
 & & & & \downarrow d_n & & \\
 & & & & D_{n-1} & &
 \end{array}$$

Como $A \in \text{Mod-}R$ es plano, al aplicar el funtor $(A \otimes_R -)$ a este diagrama se obtiene otro diagrama conmutativo con filas y columnas exactas:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \uparrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & A \otimes_R B_n(D) & \xrightarrow{i_\#} & A \otimes_R Z_n(D) & \xrightarrow{p_\#} & A \otimes_R H_n(D) \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow q_\# & & \downarrow j_\# & & \\
 & & A \otimes_R D_{n+1} & \xrightarrow{(d_{n+1})_\#} & A \otimes_R D_n & & \\
 & & & & \downarrow (d_n)_\# & & \\
 & & & & A \otimes_R D_{n-1} & &
 \end{array}$$

La exactitud de la segunda columna dice que $A \otimes_R Z_n(D)$ es el núcleo de $(d_n)_\# = 1_A \otimes d_n$, es decir, $A \otimes_R Z_n(D) = Z_n(A \otimes D)$. Además, como $i_\#$ y $j_\#$ son monomorfismos, la conmutatividad del cuadrado identifica $A \otimes_R B_n(D)$ con $\text{im}(d_{n+1})_\# = B_n(A \otimes D)$ como subgrupo de $Z_n(A \otimes D)$. El homomorfismo cociente $p_\#$ induce un isomorfismo $H_n(A \otimes_R D) \simeq A \otimes_R H_n(D)$ que lleva $[a \otimes x]$ en $a \otimes [x]$ para cada $x \in Z_n(D)$; este isomorfismo es inverso a μ . \square

Teorema 3.39 (Künneth). *Sean C_\bullet y D_\bullet dos complejos en $\text{Comp-}R$ y $R\text{-Comp}$ respectivamente. Supóngase que cada $Z_n(C)$ y cada $B_n(C)$ es un R -módulo derecho plano. Entonces, para cada $r \in \mathbb{N}$, hay una sucesión exacta corta de grupos abelianos:*

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{m+n=r} H_m(C) \otimes_R H_n(D) \xrightarrow{\mu} H_r(C \otimes_R D) \xrightarrow{\beta} \bigoplus_{m+k=r-1} \text{Tor}_1^R(H_m(C), H_k(D)) \longrightarrow 0. \quad (3.22)$$

Demostración. Los R -módulos graduados $Z_\bullet(C) := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} Z_n(C)$ y $B_\bullet(C) := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} B_n(C)$ forman complejos de cadenas con diferencial nulo ($d = 0$), cuyas homologías están dadas por $H_n(Z(C)) = Z_n(C)$ y $H_n(B(C)) = B_n(C)$ para cada n .

De la demostración del Lema 3.38, aplicado con $A = Z_m(C)$ o $A = B_m(C)$ para cada m , se obtiene

$$H_\bullet(Z(C) \otimes_R D) \simeq Z_\bullet(C) \otimes_R H_\bullet(D), \quad H_\bullet(B(C) \otimes_R D) \simeq B_\bullet(C) \otimes_R H_\bullet(D),$$

donde el R -módulo graduado $H_\bullet(D) := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} H_n(D)$ es otro complejo con diferencial nulo.

Ahora considérese la sucesión exacta corta de complejos

$$0 \longrightarrow B_\bullet(C) \xrightarrow{i} Z_\bullet(C) \xrightarrow{p} H_\bullet(C) \longrightarrow 0$$

y tómesese su producto tensorial con $H_\bullet(D)$. Como $Z_\bullet(C)$ es un R -módulo derecho plano, el Escolio 3.36 muestra que $\text{Tor}_1^R(Z_\bullet(C), H_\bullet(D)) = 0$. Entonces la sucesión larga en homología (3.12) termina con

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \text{Tor}_1^R(H_\bullet(C), H_\bullet(D)) &\xrightarrow{\partial} H_\bullet(B(C) \otimes_R D) \\ &\xrightarrow{i_*} H_\bullet(Z(C) \otimes_R D) \xrightarrow{p_*} H_\bullet(C) \otimes_R H_\bullet(D) \longrightarrow 0. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Hay otra sucesión exacta corta de complejos:

$$0 \longrightarrow Z_\bullet(C) \xrightarrow{j} C_\bullet \xrightarrow{q} B_\bullet(C)[-1] \longrightarrow 0.$$

Al tomar la sucesión exacta larga del producto tensorial de este complejo con D_\bullet , habida cuenta de la condición $\text{Tor}_1^R(B_\bullet(C), D_\bullet) = 0$ ya que $B_\bullet(C)$ es plano, se obtiene la sucesión exacta corta:

$$0 \longrightarrow Z_\bullet(C) \otimes_R D_\bullet \xrightarrow{j_\#} C_\bullet \otimes_R D_\bullet \xrightarrow{q_\#} (B_\bullet(C) \otimes_R D_\bullet)[-1] \longrightarrow 0.$$

Ahora la sucesión exacta larga (1.13) de este complejo tiene la forma

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow H_\bullet(B(C) \otimes_R D) &\xrightarrow{i_*} H_\bullet(Z(C) \otimes_R D) \xrightarrow{j_{\#*}} H_\bullet(C \otimes_R D) \\ &\xrightarrow{q_{\#*}} H_\bullet(B(C) \otimes_R D)[-1] \xrightarrow{i_*} H_\bullet(Z(C) \otimes_R D)[-1] \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

porque es fácil chequear que el morfismo conector es efectivamente i_* en este caso.

Esta sucesión exacta larga en Ab se puede considerar como el empalme de sucesiones exactas cortas dadas por la factorización canónica de morfismos (2.15). Las SEC centradas en los términos $H_r(C \otimes_R D)$ forman una sucesión exacta corta de complejos:

$$0 \longrightarrow \text{coker } i_* \longrightarrow H_\bullet(C \otimes_R D) \longrightarrow \ker i_*[-1] \longrightarrow 0.$$

Al consultar la sucesión exacta (3.23), se ve que $\text{coker } i_* \simeq H_\bullet(C) \otimes_R H_\bullet(D)$ y también $\ker i_*[-1] \simeq \text{Tor}_1^R(H_\bullet(C), H_\bullet(D))[-1]$. La SEC (3.22) queda comprobada. \square

Las hipótesis del teorema de Künneth (que los $Z_n(C)$ y los $B_n(C)$ sean planos) pueden parecer artificiales. Sin embargo, se cumplen en diversos ejemplos. Para empezar, como cada R -módulo proyectivo es plano, basta pedir que todos estos R -módulos sean proyectivos. La definición siguiente es relevante.

Definición 3.40. Un anillo R es **hereditario a derecha** si todo submódulo de un R -módulo derecho proyectivo es también proyectivo.

Ejemplos de anillos hereditarios a derecha son los anillos enteros principales¹⁴ y los anillos de Dedekind.¹⁵ \diamond

En particular, si R es hereditario a derecha, basta pedir que los C_n sean proyectivos, ya que $Z_n(C)$ y $B_n(C)$ son R -submódulos de C_n .

► En la sección 3.4 se comprobó que $\text{Ext}_R^1(-, -): R\text{-Mod}^\circ \times R\text{-Mod} \rightarrow \text{Ab}$ es un bifunctor, de una manera indirecta: se demostró que es naturalmente isomorfo a otro bifunctor $\mathcal{E}(-, -)$. Este resultado puede generalizarse, al introducir bifuntores $\mathcal{E}^n(-, -)$ de “ n -extensiones” y así comprobar que cada $\text{Ext}_R^n(-, -)$ es un bifunctor.

Entonces cabe preguntar si los $\text{Tor}_n^R(-, -): \text{Mod-}R \times R\text{-Mod} \rightarrow \text{Ab}$ son bifuntores. Ya se sabe que los $\text{Tor}_n^R(A, -)$ y $\text{Tor}_n(-, B)$ son funtores covariantes; solo falta comprobar la compatibilidad de las dos formas de obtener $\text{Tor}_n^R(A, B)$ – al evaluar el primer funtor en B o el segundo en A . Se debe recordar que se usó la segunda opción (3.8) para definir $\text{Tor}_n^R(A, B)$.

Proposición 3.41. *Sea $(C_{\bullet\bullet}, \delta, \partial)$ un bicomplejo (3.18) donde todas las filas excepto $(C_{\bullet 0}, \delta)$ y todas las columnas excepto $(C_{0\bullet}, \partial)$ son exactas. Entonces las homologías de los dos bordes son isomorfos:*

$$H_n(C_{0\bullet}, \partial) \simeq H_n(C_{\bullet 0}, \delta) \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}. \quad (3.24)$$

Demostración. El caso $n = 0$ es fácil, porque ∂_{11} y δ_{11} son sobreyectivos:

$$H_0(C_{0\bullet}, \partial) = \frac{C_{00}}{\text{im } \partial_{01}} = \frac{C_{00}}{\text{im } \partial_{01}\delta_{11}} = \frac{C_{00}}{\text{im } \delta_{10}\partial_{11}} = \frac{C_{00}}{\text{im } \delta_{10}} = H_0(C_{\bullet 0}, \delta)$$

ya que $\delta_{10}\partial_{11} = -\partial_{01}\delta_{11}$.

Para $n \geq 1$, escríbase $Z_{0n} := \ker \partial_{0n}$, $Z_{n0} := \ker \delta_{n0}$, $B_{0n} := \text{im } \partial_{0,n+1}$ y $B_{n0} := \text{im } \delta_{n+1,0}$. Se debe mostrar que $Z_{0n}/B_{0n} \simeq Z_{n0}/B_{n0}$.

Para el caso $n = 1$, nótese que $\ker d_1 = \{(a_0, a_1) \in C_{01} \oplus C_{10} : \partial a_0 = \delta a_1 = 0\}$. Obsérvese también que $(a_0, a_1) = d(b_0, b_1, b_2) \in \text{im } d_2$ si y solo si

$$(b_0, b_1, b_2) \in C_{02} \oplus C_{11} \oplus C_{20} \quad \text{cumple} \quad \partial b_0 = a_0 = \delta b_1 \quad \text{y} \quad \partial b_1 = a_1 = \delta b_2.$$

En general, $(a_0, \dots, a_n) \in \ker d_n$ si y solo si $\partial a_0 = 0$; $\delta a_{j+1} = -\partial a_j$ para $j = 0, \dots, n-1$; y $\delta a_n = 0$. También, $(a_0, \dots, a_n) \in \text{im } d_{n+1}$ si y solo si hay $(b_0, \dots, b_{n+1}) \in (\text{Tot } C)_{n+1}$ tal que

¹⁴Si R es entero principal – en particular, si $R = \mathbb{F}[x]$ es un anillo polinomial en una variable – entonces cada submódulo de un R -módulo libre es también libre, y por tanto cada R -módulo proyectivo es libre. Por un teorema de Kaplansky, un anillo R es hereditario a derecha si y solo si cada ideal derecho J de R es un R -módulo proyectivo (véase el Teorema 1.5.3 del libro de Cartan y Eilenberg). Si R es entero principal, entonces $J = xR$ es libre y por ende proyectivo, dando así otra demostración de que R es hereditario a derecha.

¹⁵Véase el libro *Algebra* de Lang, p. 168.

$$\partial b_j = a_j = \delta b_{j+1} \text{ para } j = 0, \dots, n.$$

$$\begin{array}{ccccc}
 C_{03} & & & & \\
 \partial \downarrow & & & & \\
 C_{02} & \xleftarrow{\delta} & C_{12} & & \\
 \partial \downarrow & & \partial \downarrow & & \\
 C_{01} & \xleftarrow{\delta} & C_{11} & \xleftarrow{\delta} & C_{21} \\
 \partial \downarrow & & \partial \downarrow & & \partial \downarrow \\
 C_{00} & \xleftarrow{\delta} & C_{10} & \xleftarrow{\delta} & C_{20} & \xleftarrow{\delta} & C_{30}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccccc}
 b_0 & \xleftarrow{\delta} & c_1 & & \\
 \partial \downarrow & & \partial \downarrow & & \\
 a_0 & \xleftarrow{\delta} & b_1 & \xleftarrow{\delta} & c_2 \\
 \partial \downarrow & & \partial \downarrow & & \partial \downarrow \\
 0 & \xleftarrow{\delta} & a_1 & \xleftarrow{\delta} & b_2
 \end{array}$$

Sea $a_0 \in Z_{01}$. Como δ_{11} es sobreyectivo, existe $b_1 \in C_{11}$ tal que $\delta b_1 = a_0$, y sea $a_1 := \partial b_1 \in C_{10}$. Entonces $\delta a_1 = \delta \partial b_1 = -\partial \delta b_1 = -\partial a_0 = 0$, así que $(a_0, a_1) \in \ker d_1$. Si $b'_1 \in C_{11}$ es otro elemento tal que $\delta b'_1 = a_0$, entonces $b'_1 - b_1 \in \ker \delta_{11} = \text{im } \delta_{21}$, así que hay $c_2 \in C_{21}$ tal que $b'_1 = b_1 + \delta c_2$. Entonces $a'_1 := \partial b'_1 = a_1 + \partial \delta c_2 = a_1 + \delta b_2$ con $b_2 := -\partial c_2$, así que $[a'_1] = [a_1]$ en Z_{10}/B_{10} .

Si además $a'_0 = a_0 + \partial b_0$ para algún $b_0 \in C_{02}$, y si $b''_1 \in C_{11}$ cumple $\delta b''_1 = a'_0$, sea $a''_1 := \partial b''_1 \in C_{10}$. De nuevo, $\delta a''_1 = -\partial a'_0 = 0$, esto es, $(a'_0, a''_1) \in \ker d_1$. Tómese $c_1 \in C_{12}$ con $\delta c_1 = b_0$, de modo que $\delta(b''_1 - b_1 + \partial c_1) = a'_0 - a_0 - \partial b_0 = 0$; por lo tanto, $b''_1 - b_1 + \partial c_1 = \delta c'_2$ con $c'_2 \in C_{21}$. Luego $a''_1 - a_1 = \partial(b''_1 - b_1 + \partial c_1) = -\partial \delta c_2$, y de nuevo $[a''_1] = [a_1]$ en Z_{10}/B_{10} .

Se concluye que $[a_0] \mapsto [a_1]$ es un R -homomorfismo bien definido de $Z_{01}/B_{01} \simeq Z_{10}/B_{10}$, producido por el algoritmo $a_0 \mapsto b_1 \mapsto a_1$. Inversamente, hay un algoritmo similar $\tilde{a}_1 \mapsto \tilde{b}_1 \mapsto \tilde{a}_0$ que produce un R -homomorfismo $[\tilde{a}_1] \rightarrow [\tilde{a}_0]$ que invierte el anterior, comprobando que $[a_0] \mapsto [a_1]$ es un R -isomorfismo. Esto verifica (3.24) para $n = 1$.

Los casos $n \geq 2$ siguen por el mismo proceso. Si $a_0 \in Z_{0n}$, se produce $(a_0, \dots, a_n) \in \ker d_n$ y $a_n \in Z_{n0}$ por el siguiente “algoritmo zigzag”: $a_0 = \delta b_1$ porque δ_{1n} es sobreyectivo; $a_1 := \partial b_1$; $a_1 = \delta b_2$ porque $a_1 \in \ker \delta_{1,n-1} = \text{im } \delta_{2,n-2}$; $a_2 := \partial b_2$; $a_2 = \delta b_3$; etcétera, terminando con $a_n := \partial b_n$. Se deja al lector comprobar que la asignación $[a_0] \mapsto [a_n]$ es un R -homomorfismo bien definido $Z_{0n}/B_{0n} \rightarrow Z_{n0}/B_{n0}$. Al revertir la dirección del zigzag, el algoritmo también produce el R -homomorfismo inverso. \square

Proposición 3.42. *Sea A un R -módulo derecho y B un R -módulo izquierdo. Las dos formas de definir $\text{Tor}_n^R(A, B)$ por funtores derivados izquierdos son naturalmente isomorfas:*

$$\mathcal{L}_n(A \otimes_R -)(B) \simeq \mathcal{L}_n(- \otimes_R B)(A) \equiv \text{Tor}_n^R(A, B).$$

Demostración. Sean $P_\bullet \xrightarrow{\pi} A$ y $Q_\bullet \xrightarrow{\rho} B$ resoluciones proyectivas de A y B en $\text{Comp-}R$ y $R\text{-Comp}$ respectivamente. Se puede extender el bicomplejo (3.19), cuyo complejo total es

$P_\bullet \otimes_R Q_\bullet$, al aumentarlo por la columna $A \otimes_R Q_\bullet$ a la izquierda y la fila $P_\bullet \otimes_R B$ abajo, así:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 A \otimes_R Q_2 & \xleftarrow{\pi_\sharp} & P_0 \otimes_R Q_2 & \xleftarrow{\delta} & P_1 \otimes_R Q_2 & \xleftarrow{\delta} & P_2 \otimes_R Q_2 & \xleftarrow{\quad} \\
 \partial \downarrow & & \partial \downarrow & & \partial \downarrow & & \partial \downarrow & \\
 A \otimes_R Q_1 & \xleftarrow{\pi_\sharp} & P_0 \otimes_R Q_1 & \xleftarrow{\delta} & P_1 \otimes_R Q_1 & \xleftarrow{\delta} & P_2 \otimes_R Q_1 & \xleftarrow{\quad} \\
 \partial \downarrow & & \partial \downarrow & & \partial \downarrow & & \partial \downarrow & \\
 A \otimes_R Q_0 & \xleftarrow{\pi_\sharp} & P_0 \otimes_R Q_0 & \xleftarrow{\delta} & P_1 \otimes_R Q_0 & \xleftarrow{\delta} & P_2 \otimes_R Q_0 & \xleftarrow{\quad} \\
 \downarrow & & \rho_b \downarrow & & \rho_b \downarrow & & \rho_b \downarrow & \\
 0 & \xleftarrow{\quad} & P_0 \otimes_R B & \xleftarrow{\delta} & P_1 \otimes_R B & \xleftarrow{\delta} & P_2 \otimes_R B & \xleftarrow{\quad}
 \end{array}$$

donde $\delta_{0n} \equiv (\pi_\sharp)_n := \pi \otimes 1_{Q_n}$ y $\partial_{m0} \equiv (\rho_b)_m := (-1)^m 1_{P_m} \otimes \rho$. De este modo, se obtiene un nuevo bicomplejo en el primer cuadrante, al tomar $C_{mn} := P_m \otimes_R Q_n$ para $m, n \in \mathbb{N}$, $C_{-1,n} := A \otimes_R Q_n$, $C_{m,-1} := P_m \otimes_R B$ y $C_{-1,-1} := 0$.

El nuevo bicomplejo tiene filas y columnas exactas, con la excepción de la columna izquierda $A \otimes_R Q_\bullet$ y la fila inferior $P_\bullet \otimes_R B$. Esto sucede porque cada P_m y cada Q_n es un R -módulo proyectivo y por tanto plano, así que los funtores $(P_m \otimes_R -)$ y $(- \otimes_R Q_n)$ conservan la exactitud de las resoluciones respectivas. (Además, ∂_{02} y δ_{20} son epimorfismos porque los funtores $(A \otimes_R -)$ y $(- \otimes_R B)$ son exactos a derecha.) Entonces la Proposición 3.41 es aplicable a este caso.

Las homología de la columna izquierda y de la fila inferior son, por definición, las dos funtores derivados del enunciado, evaluados en (A, B) . La fórmula (3.24) se convierte en:

$$\mathcal{L}_n(A \otimes_R -)(B) \simeq \mathcal{L}_n(- \otimes_R B)(A) \quad \text{para } n \in \mathbb{N}.$$

Es casi evidente (y fácil de comprobar) que estas isomorfismos son naturales en A y B . Se puede tomar cualquiera de las dos homología como definición de $\text{Tor}_n^R(A, B)$. De este modo, queda verificado que $\text{Tor}_n^R(-, -)$ es un *bifunctor* : $\text{Mod-}R \times R\text{-Mod} \rightarrow \text{Ab}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. \square

Es posible dar una demostración directa de que cada $\text{Ext}_R^n(-, -)$ es un bifunctor, usando una versión cohomológica de las últimas dos proposiciones. Dados dos R -módulos izquierdos A y B , tómesese una resolución proyectiva $P_\bullet \xrightarrow{\pi} A$ y una resolución inyectiva $B \xrightarrow{\eta} Q^\bullet$. Entonces se puede formar un bicomplejo con entradas $C^{mn} := \text{Hom}_R(P_m, Q^n)$, aumentados por dos complejos de cocadenas $\text{Hom}_R(A, Q^\bullet)$ y $\text{Hom}_R(P_\bullet, B)$. Este bicomplejo tiene filas y columnas exactas, excepto en los extremos. Los funtores derivados derechos de estos complejos son isomorfos:

$$\mathcal{R}^n(\text{Hom}_R(A, -))(B) \simeq \mathcal{R}^n(\text{Hom}_R(-, B))(A) \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Cualquiera de estas dos expresiones sirve para definir $\text{Ext}_R^n(A, B)$.

3.6 Ejercicios sobre resoluciones y funtores derivados

Los objetos en estos ejercicios son R -módulos izquierdos, salvo indicación contraria.

Ejercicio 3.1. Si $P = \bigoplus_{j \in J} P_j$ es una suma directa en $R\text{-Mod}$, demostrar que P es proyectivo si y solo si cada P_j es proyectivo.

Ejercicio 3.2. Demostrar el Escolio 3.8.

Ejercicio 3.3. En la demostración de la Proposición 3.9, se usó un pushout (3.4) de un diagrama $Q \xleftarrow{k} A \xrightarrow{f} B$ con $f: A \rightarrow B$ un R -monomorfismo. Comprobar que el morfismo $j: Q \rightarrow C$ es también un R -monomorfismo, que esa demostración asume implícitamente.

Ejercicio 3.4 (Lema de Schaunel). Dadas dos sucesiones exactas cortas en $R\text{-Mod}$:

$$0 \longrightarrow A_1 \xrightarrow{i} P_1 \xrightarrow{p} C \longrightarrow 0 \quad \text{y} \quad 0 \longrightarrow A_2 \xrightarrow{j} P_2 \xrightarrow{q} C \longrightarrow 0$$

con P_1 y P_2 proyectivos, demostrar que hay un isomorfismo $A_1 \oplus P_2 \simeq A_2 \oplus P_1$.

[[Indicación: Construir una SEC de la forma $0 \longrightarrow A_1 \longrightarrow A_2 \oplus P_1 \longrightarrow P_2 \longrightarrow 0$.]]

Ejercicio 3.5. Sea $R = \mathbb{Z}C_n$ el anillo del grupo cíclico finito $C_n = \{1, g, g^2, \dots, g^{n-1}\}$. Considérese \mathbb{Z} como un R -módulo trivial, al tomar $g \cdot m := m$ para todo $m \in \mathbb{Z}$. Defínase un R -homomorfismo $\varepsilon: \mathbb{Z}C_n \rightarrow \mathbb{Z}$ por:

$$\varepsilon\left(\sum_{k=0}^{n-1} m_k g^k\right) := \sum_{k=0}^{n-1} m_k \in \mathbb{Z}.$$

Sea $T := 1 - g$, $N := 1 + g + \dots + g^{n-1}$ en $\mathbb{Z}C_n$. Demostrar que la sucesión periódica infinita

$$\dots \xrightarrow{\times N} \mathbb{Z}C_n \xrightarrow{\times T} \mathbb{Z}C_n \xrightarrow{\times N} \mathbb{Z}C_n \xrightarrow{\times T} \mathbb{Z}C_n \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

es una resolución libre del R -módulo trivial \mathbb{Z} .

Ejercicio 3.6. Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes, para $P \in R\text{-Mod}$:

- (i) P es proyectivo.
- (ii) $\text{Ext}_R^n(P, B) = 0$ para todo $n \geq 1$ y todo $B \in R\text{-Mod}$.
- (iii) $\text{Ext}_R^1(P, B) = 0$ para todo $B \in R\text{-Mod}$.

[[Indicación: Para comprobar (iii) \implies (i), aplíquese la sucesión exacta larga del funtor $\text{Hom}_R(-, B)$ a una SEC de la forma $0 \longrightarrow A \longrightarrow P' \longrightarrow P \longrightarrow 0$ con P' proyectivo.]]

Ejercicio 3.7. Si $\mathcal{F}: R\text{-Mod} \rightarrow \text{Ab}$ es un funtor cualquiera y si $P \in R\text{-Mod}$ es proyectivo, demostrar que $\mathcal{L}_0\mathcal{F}(P) = \mathcal{F}P$ y que $\mathcal{L}_n\mathcal{F}(P) = 0$ para $n \geq 1$.

Ejercicio 3.8. Si $e \in R$ es un elemento *idempotente*, es decir, $e^2 = e$, mostrar que el ideal izquierdo Re es proyectivo en $R\text{-Mod}$ y que el ideal derecho eR es proyectivo en $\text{Mod-}R$.

Ejercicio 3.9 (Fórmula de Kaplansky). Sea $R = M_n(\mathbb{C})$ el anillo de matrices complejas $n \times n$. Un **proyector** (ortogonal) en R es una matriz p tal que $p^2 = p = p^*$, donde $[a_{ij}]^* = [\bar{a}_{ji}]$ es la matriz *adjunta* (conjugado hermítico) de $[a_{ij}]$. Resulta que cada ideal derecho proyectivo eR , para $e = e^2$ idempotente, coincide con pR para algún proyector $p \in M_n(\mathbb{C})$.

Verificar la siguiente fórmula para p en función de e .

Sea $r := ee^* + (1 - e^*)(1 - e) = 1 + (e - e^*)(e^* - e) \in R$. Comprobar que r es una matriz definida positiva, y por lo tanto r es invertible en R . Demostrar que $re = er$ y $re^* = e^*r$; concluir que $r^{-1}e = er^{-1}$ y $r^{-1}e^* = e^*r^{-1}$.

Defínase $p := ee^*r^{-1} \in R$. Comprobar que $p^2 = p = p^*$ y que $ep = p$ y $pe = e$. Concluir que $pR = eR$.

Con respecto a la suma directa ortogonal $\mathbb{C}^n = e\mathbb{C}^n \oplus (e\mathbb{C}^n)^\perp$, el idempotente e tiene una matriz de la forma:

$$e = \begin{pmatrix} 1 & T \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{donde } T: (e\mathbb{C}^n)^\perp \rightarrow e\mathbb{C}^n \text{ es lineal.}$$

¿Cuál es la matriz correspondiente de p ?

Ejercicio 3.10. En la Definición 3.21, se define los productos de torsión $A \mapsto \text{Tor}_n^R(A, B)$ como funtores derivados. Usar la resolución libre de $\mathbb{Z}/2$ como módulo sobre $(\mathbb{Z}/4)$ dada en el Ejercicio 3.15 para demostrar que $\text{Tor}_n^{\mathbb{Z}/4}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2) \simeq \mathbb{Z}/2$ para todo n . Concluir que $\mathbb{Z}/2 \otimes_{\mathbb{Z}/4} \mathbb{Z}/2 \simeq \mathbb{Z}/2$ como grupos abelianos.

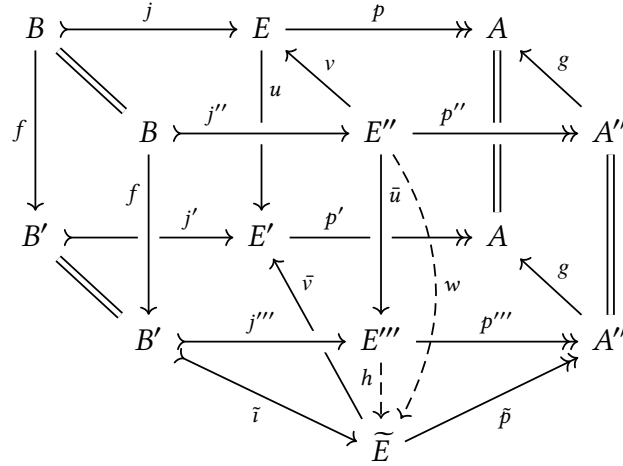
Ejercicio 3.11. Demostrar el Escolio 3.23.

Ejercicio 3.12. La demostración del Lema 3.25 “de la herradura” quedó incompleta, al no declarar explícitamente el argumento inductivo que construye los morfismos $Q_n \rightarrow Q_{n-1}$. Escribir el segundo paso de la inducción: es decir, dados los morfismos $j_1: P_1 \rightarrow Q_1$ y $p_1: Q_1 \rightarrow R_1$ de la suma directa $Q_1 := P_1 \oplus R_1$ y las diferenciales $d_1: P_1 \rightarrow P_0$ y $d'_1: R_1 \rightarrow R_0$, construir un morfismo $d''_1: Q_1 \rightarrow Q_0$ tal que los dos cuadrados centrales del diagrama (3.11) conmuten y la segunda fila sea exacta en Q_0 .

Ejercicio 3.13. Si $f: A \rightarrow B$ es un homomorfismo inyectivo en Ab , demostrar que el homomorfismo $f_\#: \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} A \rightarrow \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} B$ es también inyectivo. Concluir que el grupo aditivo $(\mathbb{Q}, +)$ es un \mathbb{Z} -módulo plano pero no proyectivo.

Ejercicio 3.14. Demostrar el Escolio 3.36.

Ejercicio 3.15. Completar la parte (c) de la demostración del Lema 3.31 al demostrar que el siguiente diagrama tridimensional conmuta:



El rectángulo de atrás contiene las extensiones \underline{E} y $\underline{E}' =: f \circ \underline{E}$. El rectángulo de arriba contiene las extensiones \underline{E} y $\underline{E}'' =: \underline{E} \circ g$. Abajo aparecen dos extensiones de A'' por B' : $\underline{E}''' = f \circ \underline{E}''$ y también $\tilde{E} = \underline{E}' \circ g$.

Para mostrar que \underline{E}''' y \tilde{E} son equivalentes, se debe justificar las siguientes afirmaciones, habida cuenta de que algunos de los cuadrados en el diagrama son *pushouts* o *pullbacks*, por la construcción de las extensiones.

- La igualdad $p' u v = g p''$ implica que existe $w: E'' \rightarrow \tilde{E}$ tal que $\bar{v} w = u v$ y $\tilde{p} w = p''$.
- Se obtiene la relación $w j'' = \tilde{i} f$ al componer ambos lados con $\bar{v}: \tilde{E} \rightarrow E'$ y $\tilde{p}: \tilde{E} \rightarrow A''$.
- La igualdad $w j'' = \tilde{i} f$ implica que existe $h: E''' \rightarrow \tilde{E}$ tal que $h j''' = \tilde{i}$ y $h \bar{u} = w$.
- Se deduce que $\tilde{p} h = p'''$ al componer ambos lados con $j''': B' \rightarrow E'''$ y $\bar{u}: E'' \rightarrow E'''$.
- Esta h define una equivalencia entre las extensiones $\underline{E}''' = f \circ (\underline{E} \circ g)$ y $\tilde{E} = (f \circ \underline{E}) \circ g$.

4 Ejemplos de homologías y cohomologías

Je passe la plus clair de mon temps . . . à simplifier la théorie des champs perturbatives de façon qu'elle devienne un jour accessible à des mathématiciens – espèce d'êtres vivants qui comprend ce qu'on lui explique et ne comprend pas ce qu'on ne lui explique pas – .

— Carta de Raymond Stora a Jean-Louis Koszul, 2004

En los capítulos anteriores, el formalismo general del álgebra homológica ha sido examinado y expuesto. Ya es hora de precisar los casos particulares más relevantes e históricamente más importantes de homología o cohomología, para encontrar los lazos entre dicho formalismo y el quehacer matemático en general.

4.1 Homología singular de espacios topológicos

La llamada *topología algebraica* comenzó con el trabajo de Poincaré, cuyo *Analysis Situs* (1895) introdujo los espacios topológicos y propuso algunas ideas para clasificarlos.¹ Poincaré consideró esos espacios como uniones de poliedros (de varias dimensiones) ligados por ciertas relaciones algebraicas (“homologías”); notó que dichas relaciones se mantienen al subdividir los poliedros. Entonces los símlices son los constituyentes fundamentales de tales espacios.

Definición 4.1. Denótese por Δ^n el *n -símlice estándar*,²

$$\Delta^n := \{ \mathbf{t} = (t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \text{cada } t_i \geq 0 \text{ y } t_0 + t_1 + \dots + t_n = 1 \}. \quad (4.1)$$

Sus **vértices** e_0, \dots, e_n , tomados en el orden usual, forman la base estándar de \mathbb{R}^{n+1} . Cada $\mathbf{t} = \sum_{j=0}^n t_j e_j \in \Delta^n$ es una *combinación convexa* de sus vértices.

Si $J = \{j_0, j_1, \dots, j_m\} \subseteq \{0, 1, \dots, n\}$, la envoltura convexa $[e_{j_0}, \dots, e_{j_m}]$ de los vértices e_{j_0}, \dots, e_{j_m} es una **m -faceta** de Δ^n . Esta m -faceta es la imagen de la *función afín* $g: \Delta^m \rightarrow \Delta^n$ determinada por $g(e_r) := e_{j_r}$ para $r = 0, 1, \dots, m$. (Se dice *faceta* sin calificativo cuando $m = n - 1$.)³ \diamond

Notación. Conviene abreviar $[n] \equiv \{0, 1, \dots, n\}$ para $n \in \mathbb{N}$, con el orden usual. Este conjunto (sin el orden) es el número cardinal $n + 1$; con el orden, $[n]$ representa un *número ordinal*.

¹Este artículo es: Henri Poincaré, “Analysis Situs”, *Journal de l'École Polytechnique* **1** (1895), 1–123. La definición moderna de espacio topológico emergió posteriormente en los trabajos de Hausdorff (1914) y Kuratowski (1922). Los espacios considerados por Poincaré fueron esencialmente variedades diferenciales conexas de clase C^1 que admiten triangulaciones. Para la cronología histórica del álgebra topológica, se recomienda el libro citado de Dieudonné.

²Algunos libros emplean el vocablo *simplex* (de Nuevo Latín; plural: *simplicia*) en vez de “símlice”.

³Si X, Y son conjuntos convexos, una función $f: X \rightarrow Y$ es **afín** si $f((1-t)x_1 + tx_2) = (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$ para $x_1, x_2 \in X$, $0 \leq t \leq 1$.

Definición 4.2. La **categoría simplicial** $\underline{\Delta}$ es una categoría pequeña cuyos objetos son los $[n]$, para $n \in \mathbb{N}$, y cuyos morfismos son las *funciones no decrecientes* $h: [m] \rightarrow [n]$. \diamond

Si Conv es la categoría cuyos objetos son las partes convexas de espacios \mathbb{R} -vectoriales y cuyos morfismos son las funciones afines, hay un funtor evidente $\Delta: \underline{\Delta} \rightarrow \text{Conv}$ dado por $\Delta[n] := \Delta^n$, donde $h_{\natural} \equiv \Delta h$ es la función afín $\sum_{j=0}^m t_j e_j \mapsto \sum_{j=0}^m t_j e_{h(j)}$.

Una función afín queda determinada por las imágenes de los vértices del dominio, así que la abstracción combinatoria $\underline{\Delta}$ contiene toda la información necesaria para manejar símplices.

Cualquier $h: [m] \rightarrow [n]$ en $\text{Mor}(\underline{\Delta})$ se factoriza como $h = h'h''$ donde $h'': [m] \rightarrow [k]$ es un epimorfismo y $h': [k] \rightarrow [n]$ es un monomorfismo. (Si la imagen de h es $\{j_0 < \dots < j_k\}$, tómese $h''(j) := r$ para $h(j) = j_r$ y enseguida $h'(r) := j_r$; es evidente que h'' es sobreyectivo, h' es inyectivo y h', h'' son funciones no decrecientes.) A su vez, cada monomorfismo es una composición de monomorfismos $[k-1] \rightarrow [k]$ y cada epimorfismo es una composición de epimorfismos $[k+1] \rightarrow [k]$.

Escolio 4.3. Considérese las **aplicaciones faciales** $\underline{\Delta}([n-1], [n]) = \{u_n^0, \dots, u_n^n\}$ y las **aplicaciones degenerativas** $\underline{\Delta}([n+1], [n]) = \{v_n^0, \dots, v_n^n\}$ tales que la imagen de u_n^i omite el valor i y v_n^i repite el valor i dos veces:

$$u_n^i := \begin{cases} j \mapsto j & \text{si } j < i, \\ j \mapsto j+1 & \text{si } j \geq i, \end{cases} \quad v_n^i := \begin{cases} j \mapsto j & \text{si } j \leq i, \\ j \mapsto j-1 & \text{si } j > i. \end{cases}$$

Entonces estos morfismos cumplen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} u_{n+1}^j u_n^i &= u_{n+1}^i u_n^{j-1} \quad \text{si } i < j; \\ v_n^j v_{n+1}^i &= v_n^i v_{n+1}^{j+1} \quad \text{si } i \leq j; \\ v_n^j u_{n+1}^i &= \begin{cases} u_n^i v_{n-1}^{j-1} & \text{si } i < j, \\ 1_{[n]} & \text{si } i = j, j+1, \\ u_n^{i-1} v_{n-1}^j & \text{si } i > j+1. \end{cases} \end{aligned}$$

Escolio 4.4. Cada morfismo $h: [m] \rightarrow [n]$ en $\underline{\Delta}$ posee una factorización única de la forma

$$h = u_n^{i_{n-k}} \dots u_{k+1}^{i_1} v_k^{j_1} \dots v_{m-1}^{j_{m-k}}$$

donde $0 \leq i_1 \leq \dots \leq i_{n-k} \leq n$; $0 \leq j_1 < \dots < j_{m-k} < m$. \boxminus

El término *aplicación facial* viene de la versión geométrica $d^j \equiv \Delta u_n^j: \Delta^{n-1} \rightarrow \Delta^n$ que encaja Δ^{n-1} como la j -ésima faceta de Δ^n . En efecto, la envoltura convexa de los vértices $\{e_0, \dots, e_{j-1}, e_{j+1}, \dots, e_n\}$ es la faceta de Δ^n opuesta al vértice e_j .

Definición 4.5. Un **conjunto simplicial** es un funtor contravariante $X: \underline{\Delta}^\circ \rightarrow \text{Set}$. Se escribe $X_n \equiv X[n]$, así que un conjunto simplicial consta de una familia numerable de conjuntos

$\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ junto con funciones $\partial_j \equiv Xu_n^j : X_n \rightarrow X_{n-1}$ y $\sigma_j \equiv Xv_n^j : X_n \rightarrow X_{n+1}$ tales que

$$\begin{aligned} \partial_i \partial_j &= \partial_{j-1} \partial_i & \text{si } i < j; \\ \sigma_i \sigma_j &= \sigma_{j+1} \sigma_i & \text{si } i \leq j; \end{aligned} \quad \partial_i \sigma_j = \begin{cases} \sigma_{j-1} \sigma_i & \text{si } i < j, \\ 1_{X_n} & \text{si } i = j, j+1, \\ \sigma_j \partial_{i-1} & \text{si } i > j+1. \end{cases} \quad (4.2)$$

Un **conjunto cosimplicial** es un *functor covariante* $A: \underline{\Delta} \rightarrow \text{Set}$. Se escribe $A^n \equiv A[n]$, así que un conjunto cosimplicial consta de una familia numerable de conjuntos $\{A^n : n \in \mathbb{N}\}$ junto con funciones $d^j \equiv Au_n^j : A^{n-1} \rightarrow A^n$ y $s^j \equiv Av_n^j : A^{n+1} \rightarrow A^n$ tales que

$$\begin{aligned} d^j d^i &= d^i d^{j-1} & \text{si } i < j; \\ s^j s^i &= s^i s^{j+1} & \text{si } i \leq j; \end{aligned} \quad s^j d^i = \begin{cases} d^i s^{j-1} & \text{si } i < j, \\ 1_{A^n} & \text{si } i = j, j+1, \\ d^{i-1} s^j & \text{si } i > j+1. \end{cases} \quad (4.3)$$

De igual manera, se definen *objetos simpliciales* y *objetos cosimpliciales* en cualquier otra categoría: Top, por ejemplo. \diamond

La familia de n -símplices estándares Δ^n forman un conjunto cosimplicial, con las aplicaciones faciales antedichas $d^j: \Delta^{n-1} \rightarrow \Delta^n$, y las aplicaciones degenerativas $s^j: \Delta^{n+1} \rightarrow \Delta^n$ que proyecta Δ^{j+1} sobre una de sus facetas al identificar e_{j+1} con e_j . Esta es una aplicación afín que colapsa la arista $[e_j, e_{j+1}]$ de Δ^{j+1} al vértice e_j de Δ^n ; por eso se llama “degenerativa”.

Definición 4.6. Un **n -símplice** en un espacio \mathbb{R} -vectorial V es la envoltura convexa $[v_0, \dots, v_n]$ de $(n+1)$ vectores en V . (Este símplice es *degenerado* si los vectores $v_1 - v_0, \dots, v_n - v_0$ son linealmente dependientes.) En otras palabras, un n -símplice es la imagen $g(\Delta^n)$ de una función afín $g: \Delta^n \rightarrow V$.

Las m -facetas del símplice $g(\Delta^n)$, para $m \leq n$, son los m -símplices generados por unos m vértices de $g(\Delta^n)$; esto es, son de la forma $g \circ f(\Delta^m)$ donde $f: \Delta^m \rightarrow \Delta^n$ es afín. (Las 0-facetas son los vértices dados.)

Un **complejo simplicial** en V es una colección \mathcal{K} de símplices en V (de varias dimensiones) tal que *todas las facetas de un símplice en \mathcal{K} son otros símplices en \mathcal{K}* . \diamond

Un n -símplice T está determinada por sus vértices, pero también al revés: los vértices son los puntos extremos del conjunto convexo T . A veces conviene trabajar directamente con el conjunto de vértices. De hecho, se puede definir un *complejo simplicial combinatorio* como una colección K de conjuntos finitos en V , con la condición de que *todas las partes de cada conjunto en K también pertenecen a K* . La colección $SS_n(K)$ de tóuplas ordenadas (v_0, \dots, v_n) – posiblemente con repeticiones – tales que $\{v_0, \dots, v_n\} \in K$ forma el nivel n de un conjunto simplicial $SS(K)$, asociado a K . El functor $SS(K): \underline{\Delta}^\circ \rightarrow \text{Set}$ lleva $h \in \underline{\Delta}([m], [n])$ en la función $(v_0, \dots, v_m) \mapsto (v_{h(0)}, \dots, v_{h(m)})$.

Hay un procedimiento estándar para recuperar el complejo simplicial (como espacio topológico) de su versión combinatoria. De hecho, el proceso es aplicable a cualquier conjunto simplicial, mediante la definición siguiente.

Definición 4.7. Sea $X = \{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ un conjunto simplicial. Se puede considerar el producto cartesiano $X_n \times \Delta^n$ como una unión disjunta de copias del *espacio topológico* Δ^n , donde se ve X_n como un conjunto índice. Sobre la unión disjunta $\biguplus_{n \in \mathbb{N}} X_n \times \Delta^n$ se define una relación de equivalencia: si $(x, t) \in X_m \times \Delta^m$, $(y, s) \in X_n \times \Delta^n$, se declara $(x, t) \sim (y, s)$ si existe $h \in \underline{\Delta}([m], [n])$ tal que $h^*(y) = x$, $h_\sharp(t) = s$. ¶ En otras palabras: $(h^*(y), t) \sim (y, h_\sharp(t))$. ¶ El espacio topológico cociente

$$|X| := \left(\biguplus_{n=0}^{\infty} X_n \times \Delta^n \right) / \sim$$

se llama la **realización geométrica** del conjunto simplicial X . ◇

De esta manera, se obtiene una buena cantidad de espacios topológicos. El interior $(\Delta^n)^\circ$ de cada n -símplice Δ^n es homeomorfo a \mathbb{R}^n (o la bola unitaria de \mathbb{R}^n). Intuitivamente, los $X_n \times (\Delta^n)^\circ$ forman una colección de *celdas* (o *células*) n -dimensionales, y la relación de equivalencia dicta los “pegamentos” de las m -celdas en las fronteras de las n -celdas. El espacio topológico resultante es un *complejo celular* (técnicamente, un “complejo CW”).

Sin embargo, hay espacios topológicos que no son homeomorfos (ni homotópicamente equivalentes) a complejos celulares. El manejo combinatorio de los complejos simpliciales no los alcanza. Para superar ese obstáculo, Lefschetz (en 1933) introdujo las *cadena singulares*.⁴

Definición 4.8. Sea X un espacio topológico. Un **n -símplice singular** en X es una función continua $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$. Sea $S_n(X) \equiv S_n(X, \mathbb{Z})$ el grupo abeliano libre generado por todos los n -símplices singulares en X . Sus elementos, “sumas formales” finitas $\sum_{i=1}^r m_i \sigma_i$ con coeficientes $m_i \in \mathbb{Z}$, son las **n -cadena singulares** en X .

Cada $h \in \underline{\Delta}([m], [n])$ determina un homomorfismo de grupos $h^\sharp: S_n(X) \rightarrow S_m(X)$ por $h^\sharp \sigma := \sigma \circ h$. En otras palabras, la correspondencia $[n] \mapsto S_n(X)$, $h \mapsto h^\sharp$ determina un funtor contravariante $S(X): \underline{\Delta}^\circ \rightarrow \mathbf{Ab}$, esto es, un objeto simplicial en \mathbf{Ab} .

El **operador de borde** $\partial \equiv \partial_n: S_n(X) \rightarrow S_{n-1}(X)$ es el homomorfismo determinado por

$$\partial_n \sigma := \sum_{k=0}^n (-1)^k \sigma \circ d_n^k. \quad (4.4)$$

⁴Solomon Lefschetz, “On singular chains and cycles”, *Bulletin of the American Mathematical Society* **39** (1933), 124–129. Unos 10 años después, Eilenberg simplificó su definición, dando la versión moderna. Véase el libro de Dieudonné, p. 68.

Geoméricamente, ∂_n reemplaza la función $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$ por la suma alternada de restricciones de σ a las facetas maximales de Δ^n , la cual es una $(n-1)$ -cadena singular. Ahora

$$\begin{aligned}\partial_{n-1}(\partial_n \sigma) &= \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{i+j} \sigma \circ (d_n^j \circ d_{n-1}^i) \\ &= \sum_{j \leq i} (-1)^{i+j} \sigma \circ (d_n^j \circ d_{n-1}^i) + \sum_{i \leq j-1} (-1)^{i+j-1} \sigma \circ (d_n^i \circ d_{n-1}^{j-1}),\end{aligned}\quad (4.5)$$

porque $d_n^j \circ d_{n-1}^i = d_n^i \circ d_{n-1}^{j-1}$ si $i < j$, por (4.3). Por lo tanto, $\partial_{n-1}(\partial_n \sigma) = 0$ por cancelación.

El complejo de cadenas $(S_\bullet(X), \partial)$ es el **complejo singular** del espacio topológico X . \diamond

A veces es útil considerar cadenas singulares $\sum_{i=1}^r m_i \sigma_i$ con coeficientes $m_i \in R$, donde R es un anillo conmutativo cualquiera. Al reemplazar \mathbb{Z} por R en la definición anterior, se define así $S_n(X, R)$, las n -cadenas singulares con coeficientes en R .

Definición 4.9. Si X es un espacio topológico, la homología del complejo singular $(S_\bullet(X), \delta)$ es la **homología singular** $H_\bullet(X) \equiv H_\bullet(X, \mathbb{Z})$ de X .

Si $f: X \rightarrow Y$ es una función continua, la precomposición $f_\sharp: \sigma \mapsto f \circ \sigma$ es un homomorfismo de $S_n(X)$ en $S_n(Y)$ tal que $\partial f_\sharp(\sigma) = f_\sharp \partial(\sigma)$. Así se define un morfismo de complejos $f_\sharp: S_\bullet(X) \rightarrow S_\bullet(Y)$ y luego un homomorfismo $f_*: H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ para cada n . La correspondencia $f \mapsto f_*$ es funtorial, por el Lema 1.27.

En breve, cada $H_n: \text{Top} \rightarrow \text{Ab}$ es un funtor covariante. \diamond

► Las definiciones anteriores proporcionan varias herramientas para poder *calcular* grupos de homología singular. Para empezar, es necesario resolver unos casos básicos.

Lema 4.10. Si X es un espacio topológico conexo por caminos, entonces $H_0(X) \simeq \mathbb{Z}$.

Demostración. Por definición, $H_0(X) = \text{coker } \partial_1 = S_0(X)/\text{im } \partial_1$. Defínase un epimorfismo $\varepsilon: S_0(X) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$ por $\varepsilon(\sum_{i=1}^r m_i \pi_i) := \sum_{i=1}^r m_i$ donde cada $\pi_i: e_0 \mapsto x_i$ es un “punto” de X .

Para cada $\sigma: \Delta^1 \rightarrow X$, se ve que $\partial_1(\sigma) = \sigma(e_1) - \sigma(e_0)$, así que $\varepsilon \partial_1(\sigma) = 1 - 1 = 0$. Esto dice que $\text{im } \partial_1 \subseteq \ker \varepsilon$.

Tómese un *punto de base* $x_0 \in X$, arbitrario pero fijo; defínase $\pi_0: \Delta^0 \rightarrow X: e_0 \mapsto x_0$. Si $\sum_{i=1}^r m_i = 0$, de modo que $\sum_{i=1}^r m_i \pi_i \in \ker \varepsilon$, sea $\sigma_i: \Delta^1 \rightarrow X$ un camino (continuo) desde x_0 hasta x_i , para $i = 1, \dots, r$. Entonces

$$\partial_1(\sum_{i=1}^r m_i \sigma_i) = \sum_{i=1}^r m_i(\pi_i - \pi_0) = \sum_{i=1}^r m_i \pi_i.$$

Esto muestra que $\ker \varepsilon \subseteq \text{im } \partial_1$ y por lo tanto la sucesión $S_1(X) \xrightarrow{\partial_1} S_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0$ es exacta. Luego $H_0(X) = \text{coker } \partial_1 \simeq \text{im } \varepsilon = \mathbb{Z}$. \square

Si X no es conexo por caminos, es una unión disjunta de varias⁵ componentes, $X = \bigsqcup_{j \in J} X_j$. Cada n -cadena singular $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$ tiene imagen $\sigma(\Delta^n) \subseteq X_j$ y también $\partial_n \sigma(\Delta^{n-1}) \subseteq X_j$ para exactamente uno de esos X_j . Esto dice que $S_\bullet(X)$ es la suma directa de los $S_\bullet(X_j)$, luego $H_0(X) \simeq \bigoplus_{j \in J} \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^{(J)}$ es un grupo abeliano libre con $\#J$ generadores. En resumen: *el grupo $H_0(X)$ cuenta el número de componentes conexas-por-caminos del espacio topológico X .*

Lema 4.11. Si $* = \{x\}$ es un singulete, entonces $H_n(*) = 0$ para $n \geq 1$, $H_0(*) \simeq \mathbb{Z}$.

Demostración. Hay una única n -cadena singular $\sigma_n: \Delta^n \rightarrow *$ para cada n . Su borde es $\partial_n \sigma_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \sigma_{n-1}$, así que $\delta_n \sigma_n = \sigma_{n-1}$ si n es par, pero $\delta_n \sigma_n = 0$ si n es impar. Entonces el complejo singular $S_\bullet(*)$ tiene la forma

$$\cdots \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{1} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{1} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

y esta sucesión es exacta excepto en el último $\mathbb{Z} = S_0(*)$. □

► La propiedad sobresaliente de la homología de espacios topológicos es su *invariancia bajo homotopía*. Sea $I = [0, 1]$, un intervalo compacto de \mathbb{R} . Una **homotopía** entre dos funciones continuas $f, g: X \rightarrow Y$ es una función continua $F: X \times I \rightarrow Y$ tal que $F(x, 0) = f(x)$, $F(x, 1) = g(x)$ para todo $x \in X$; si existe un tal F , se dice que f y g son *homotópicos*. Esta es una relación de equivalencia entre funciones continuas de X en Y . Las funciones $F_t: X \rightarrow Y: x \mapsto F(x, t)$ constituyen una interpolación continua entre $F_0 = f$ y $F_1 = g$.

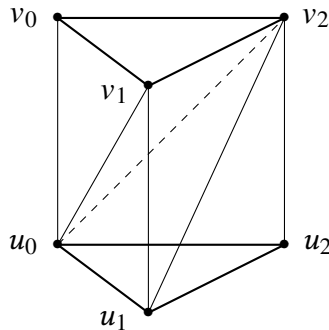


Figura 4.1: La subdivisión de $\Delta^n \times I$ en $(n + 1)$ -símplices

Lema 4.12. El prisma $\Delta^n \times I$ admite una subdivisión en unos $(n + 1)$ -símplices T_0, \dots, T_n tales que cada dos símplices consecutivos T_j y T_{j+1} colindan en una faceta común.

Demostración. Sea $u_j := (e_j, 0)$ y $v_j := (e_j, 1)$ los vértices del prisma $\Delta^n \times I$, y defínase $T_j := [u_0, \dots, u_j, v_j, \dots, v_n]$. (La Figura 4.1 muestra el caso $n = 2$, un prisma de base triangular subdividido en tres tetraedros.)

⁵El nombre adjetivo *componente* es por lo general de género masculino; pero en matemáticas se adopta el género femenino por razones desconocidas.

Considérese las funciones afines $g_j: \Delta^n \rightarrow I$ dadas por

$$g_j\left(\sum_{k=0}^n t_k e_k\right) := t_{j+1} + \cdots + t_n$$

para $j = -1, 0, 1, \dots, n$. El grafo de g_j es el n -símplice $[u_0, \dots, u_j, v_{j+1}, \dots, v_n]$. Este grafo coincide con $T_j \cap T_{j+1}$ si $j = 0, \dots, n-1$. Las funciones g_j están en orden decreciente:

$$1 \equiv g_{-1} \geq g_0 \geq \cdots \geq g_j \geq \cdots \geq g_n \equiv 0,$$

así que T_j es la región de $\Delta^n \times I$ encima de $\text{grafo}(g_j)$ y debajo de $\text{grafo}(g_{j-1})$. Se concluye que $\Delta^n \times I = \bigcup_{j=0}^n T_j$. \square

Teorema 4.13. *Si dos funciones continuas $f, g: X \rightarrow Y$ son homotópicas, entonces hay una homotopía de cadenas entre $S_\bullet(X)$ y $S_\bullet(Y)$. En consecuencia, $f_* = g_*: H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ para todo n .*

Demostración. Dada una homotopía $F: X \times I \rightarrow Y$ tal que $F_0 = f$, $F_1 = g$, defínase el operador $p_n: S_n(X) \rightarrow S_{n+1}(Y)$ por

$$p_n(\sigma) := \sum_{j=0}^n (-1)^j F \circ (\sigma \times 1_I) \upharpoonright T_j.$$

Aquí $\sigma \times 1_I: (s, t) \mapsto (\sigma(s), t) \in X \times I$. En vista de (4.4), se calcula que

$$\begin{aligned} \partial_{n+1} p_n(\sigma) &= \sum_{k \leq j} (-1)^j (-1)^k F \circ (\sigma \times 1_I) \upharpoonright [u_0, \dots, \widehat{u}_k, \dots, u_j, v_j, \dots, v_n] \\ &\quad + \sum_{k \geq j} (-1)^j (-1)^{k+1} F \circ (\sigma \times 1_I) \upharpoonright [u_0, \dots, u_j, v_j, \dots, \widehat{v}_k, \dots, v_n] \end{aligned}$$

donde \widehat{u}_k omite el término u_k de la lista. Por otro lado, un cálculo similar da

$$\begin{aligned} p_{n-1} \partial_n(\sigma) &= \sum_{j < k} (-1)^j (-1)^k F \circ (\sigma \times 1_I) \upharpoonright [u_0, \dots, u_j, v_j, \dots, \widehat{v}_k, \dots, v_n] \\ &\quad + \sum_{j > k} (-1)^{j-1} (-1)^k F \circ (\sigma \times 1_I) \upharpoonright [u_0, \dots, \widehat{u}_k, \dots, u_j, v_j, \dots, v_n]. \end{aligned}$$

Al sumar $\partial_{n+1} p_n(\sigma) + p_{n-1} \partial_n(\sigma)$, en todos los términos de esas sumas con $j \neq k$ hay cancelaciones de signos. Quedan solamente los términos con $j = k$ de la primera sumatoria. Ellos se cancelan telescópicamente, excepto el primero y el último:

$$\begin{aligned} \partial_{n+1} p_n(\sigma) + p_{n-1} \partial_n(\sigma) &= F \circ (\sigma \times 1_I) \upharpoonright [\widehat{u}_0, v_0, \dots, v_n] - F \circ (\sigma \times 1_I) \upharpoonright [u_0, \dots, u_n, \widehat{v}_n] \\ &= g \circ \sigma - f \circ \sigma. \end{aligned}$$

Se ha comprobado la relación $\partial_{n+1} p_n + p_{n-1} \partial_n = (g_{\natural})_n - (f_{\natural})_n$ y por la Definición 1.34, esto dice que los p_n forman una homotopía de cadenas entre g_{\natural} y f_{\natural} . El Lema 1.35 ahora muestra que $g_* = f_*: H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$. \square

Un espacio topológico X es **contractible** si la identidad 1_X es homotópico a la función constante $x \mapsto x_0$ para algún $x_0 \in X$. (En particular, X es conexo por caminos.) Al combinar el Lema 4.11 con el Teorema 4.13, se obtiene el resultado siguiente.

Corolario 4.14. *Si X es un espacio topológico contractible, entonces $H_n(X) = 0$ para $n \geq 1$; y $H_0(X) \simeq \mathbb{Z}$.* \square

La homología singular ha sido definido como un juego de funtores $H_n: \text{Top} \rightarrow \text{Ab}$, generalizable a funtores $H_n(-, R): \text{Top} \rightarrow R\text{-Mod}$ para R un anillo conmutativo. El caso de variedades diferenciales es de particular interés: se pretende reemplazar la categoría Top por Diff , cuyos objetos son variedades diferenciales (reales) M y cuyos morfismos son *funciones diferenciables* $f: M \rightarrow N$. Las cadenas singulares apropiadas son funciones continuas $\sigma: \Delta^n \rightarrow M$ tales que cada $\sigma \upharpoonright (\Delta^n)^\circ$ es diferenciable. Resulta que *cada aplicación continua $f: M \rightarrow N$ es continuamente homotópica a una aplicación diferenciable*.⁶ Esto no cambia la homología singular $H_\bullet(M)$, en vista del Teorema 4.13.

4.2 La cohomología de de Rham de variedades

Al tomar homología singular de un espacio topológico X con coeficientes reales, cada $S_k(X, \mathbb{R})$ es un espacio \mathbb{R} -vectorial y los operadores de borde $\partial_k: S_k(X, \mathbb{R}) \rightarrow S_{k-1}(X, \mathbb{R})$ son aplicaciones \mathbb{R} -lineales. Entonces se puede definir, por dualidad, espacios \mathbb{R} -vectoriales de **cocadenas singulares**:

$$S^k(X, \mathbb{R}) := S_k(X, \mathbb{R})^* \equiv \text{Hom}_{\mathbb{R}}(S_k(X, \mathbb{R}), \mathbb{R}).$$

con **operadores de coborde** por transposición: $d^k := (\partial_{k+1})^t: S^k(X, \mathbb{R}) \rightarrow S^{k+1}(X, \mathbb{R})$. Está claro que $d^k d^{k-1} = (\partial_k \partial_{k+1})^t = 0$, así que $(S^\bullet(X, \mathbb{R}), d)$ es un complejo de cocadenas. Los espacios \mathbb{R} -vectoriales $H^k(X, \mathbb{R}) := Z^k(X, \mathbb{R})/B^k(X, \mathbb{R}) \equiv \ker d^k / \text{im } d^{k-1}$ constituyen la **cohomología singular** de X con coeficientes reales.

¶ De igual manera, se puede definir cocadenas y cohomología con coeficientes complejos. No hay nada nuevo que agregar, porque estos espacios \mathbb{C} -vectoriales son obtenidos por *complexificación* de los casos con coeficientes reales: $S_k(X, \mathbb{C}) \simeq S_k(X, \mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, también $H^k(X, \mathbb{C}) \simeq H^k(X, \mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, etc. ¶

En la teoría de variedades diferenciales, hay otros “grupos” de cohomología $H_{\text{dR}}^k(M)$ definidos como clases de k -formas diferenciales cerradas módulo k -formas exactas. Émile Cartan observó una dualidad entre tales clases y elementos de homología singular, dada por la integración de k -formas cerradas sobre k -ciclos en M . En su tesis doctoral en 1931,

⁶Para la demostración, véase la Proposición 17.8 del libro: Raoul Bott & Loring W. Tu, *Differential Forms in Algebraic Topology*, Graduate Texts in Mathematics **82**, Springer, Berlin, 1982.

Georges de Rham demostró que esa dualidad es estricta⁷ y da lugar a isomorfismos $H_{\text{dR}}^k(M) \simeq H^k(M, \mathbb{R})$. En consecuencia, los grupos $H_{\text{dR}}^k(M)$ no dependen de la estructura diferencial de la variedad M , sino solamente de su topología.

Definición 4.15. Si V es un espacio vectorial n -dimensional sobre un cuerpo \mathbb{F} , el *producto tensorial* $V^{\otimes k}$ de k copias de V es el espacio vectorial de sumas finitas de tensores simples $v_1 \otimes \cdots \otimes v_k$ (Definición 1.14); su dimensión es n^k . Sobre $V^{\otimes k}$ se define el *operador de antisimetrización* \mathbb{A} por:

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \equiv \mathbb{A}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) := \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^\sigma v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(k)},$$

extendido a todo $V^{\otimes k}$ por \mathbb{F} -linealidad. Obsérvese que si $k > n$, entonces $\Lambda^k V = 0$ porque en la suma anterior todos los términos se cancelan por antisimetría. El espacio \mathbb{F} -vectorial $\Lambda^k V := \mathbb{A}(V^{\otimes k})$ tiene dimensión $\binom{n}{k}$: si $\{e_1, \dots, e_n\}$ es una base de V , una base de $\Lambda^k V$ es $\{e_I : |I| = k\}$, donde $e_I := e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}$ para $I = \{i_1 < \cdots < i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$.

Para $k = 0$, se toma $\Lambda^0 V := \mathbb{F}$; nótese que $\Lambda^1 V = V$ y que $\dim \Lambda^n V = 1$. Un ejercicio de álgebra lineal verifica que el **producto exterior** \wedge (también llamado *producto cuña*), definido sobre la suma directa $\Lambda^\bullet V := \bigoplus_{k=0}^n \Lambda^k V$, es asociativo. Así, $\Lambda^\bullet V$ es una \mathbb{F} -álgebra graduada, llamado el **álgebra exterior** de V .

Si $v, w \in V$, entonces $v \wedge w = \frac{1}{2}(v \otimes w - w \otimes v) = -w \wedge v$. Más generalmente, se verifica

$$a \wedge b = (-1)^{kl} b \wedge a \quad \text{para } a \in \Lambda^k V, b \in \Lambda^l V.$$

Esta es otra instancia de la regla de signos de Koszul: $a \wedge b = (-1)^{\#a\#b} b \wedge a$. Con estas relaciones, el álgebra graduada es **superconmutativa**: hay conmutatividad entre dos términos si uno tiene grado par, pero hay anticonmutatividad entre dos términos de grado impar.⁸ \diamond

Definición 4.16. Sea M una variedad diferencial real, de dimensión n . Las funciones suaves $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ forman un anillo $C^\infty(M, \mathbb{R})$ que en general admite muchos divisores de cero.⁹

Las **formas diferenciales** sobre M de grado $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ son elementos de un espacio \mathbb{R} -vectorial:

$$\mathcal{A}^k(M) := C^\infty(M, \mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \Lambda^k(\mathbb{R}^n).$$

⁷Georges de Rham, “Sur l’Analysis Situs des variétés à n dimensions”, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* **10** (1931), 115–200. Para una demostración del teorema, véase la sección 8.9 del libro: Lawrence Conlon, *Differentiable Manifolds*, 2nd edition, Birkhäuser, Boston, 2008.

⁸El prefijo *super-* como sinónimo de la conmutatividad/anticonmutatividad de términos pares/impares fue introducido por el físico Feliks Berezin en su libro *The Method of Second Quantization* (Academic Press, New York, 1966).

⁹Esta sección presupone cierta familiaridad con variedades diferenciales. Una variedad diferencial M tiene un cubrimiento abierto por un “atlas” de *cartas locales* (U, φ) donde $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo. Sus proyecciones $x^j := \text{pr}^j \circ \varphi: U \rightarrow \mathbb{R}$ son *coordenadas locales* de M en la carta U . Una función $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ entre variedades es *suave* si cada versión local $f: \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}$ es suave (de clase C^∞) entre abiertos de \mathbb{R}^n y \mathbb{R} .

En un sistema de coordenadas locales $x = (x^1, \dots, x^n)$ definido sobre una carta local $U \subseteq M$, una **k -forma** $\omega \in \mathcal{A}^k(M)|_U = \mathcal{A}^k(U)$ se escribe así:

$$\omega = \sum_{|I|=k} \omega_I(x) dx^I \equiv \sum_{|I|=k} \omega_I(x) dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}, \quad (4.6)$$

donde cada $\omega_I \in C^\infty(U, \mathbb{R})$.

La **derivada exterior** $d: \mathcal{A}^k(M) \rightarrow \mathcal{A}^{k+1}(M)$ se define por la fórmula local

$$d\omega := \sum_{|I|=k} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \omega_I}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^I \equiv \sum_{|I|=k} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \omega_I}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}. \quad (4.7)$$

En otra carta local V con coordenadas locales $y = (y^1, \dots, y^n)$, la regla $dx^i = \sum_j (\partial x^i / \partial y^j) dy^j$ genera los cambios de variable en $U \cap V$. Un ejercicio clásico de cálculo diferencial demuestra que el lado derecho de (4.7) no depende del sistema de coordenadas usado: las fórmulas locales en dos cartas U y V coinciden sobre $U \cap V$. \diamond

Fíjese que $\mathcal{A}^0(M) = C^\infty(M, \mathbb{R})$ porque $\Lambda^0(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$. Además, $\underline{\mathcal{A}^\bullet(M)} := \bigoplus_{k=0}^n \mathcal{A}^k(M)$ es una \mathbb{R} -álgebra superconmutativa.

Escolio 4.17. La derivada exterior es una **derivación impar**¹⁰ del álgebra graduada $\mathcal{A}^\bullet(M)$:

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^{\# \alpha} \alpha \wedge d\beta.$$

Las k -formas locales dx^I forman una base local de $\mathcal{A}^k(M)|_U = \mathcal{A}^k(U)$. Si $j \in I$, entonces $dx^j \wedge dx^I = \pm(dx^j \wedge dx^j) \wedge dx^{I \setminus j} = 0$ por anticonmutatividad; en las sumatorias (4.7) solo aparecen términos $dx^j \wedge dx^I$ con $j \notin I$. Además,

$$d(d\omega) = \sum_{|I|=k} \sum_{j < l} \frac{\partial^2 \omega_I}{\partial x^j \partial x^l} (dx^j \wedge dx^l + dx^l \wedge dx^j) \wedge dx^I = 0, \quad (4.8)$$

en virtud de la simetría de las derivadas parciales mixtas: $\partial^2 \omega_I / \partial x^l \partial x^j = \partial^2 \omega_I / \partial x^j \partial x^l$.

Definición 4.18. La identidad (4.8) dice que $(\mathcal{A}^\bullet(M), d)$ es un **complejo acotado de cocadenas**, llamado el **complejo de de Rham** de la variedad diferencial M . Su cohomología $H_{\text{dR}}^\bullet(M)$ es la **cohomología de de Rham** de M . \diamond

El uso del complejo de de Rham, en vez del complejo de cocadenas singulares, facilita el cálculo de la cohomología de M en muchos casos. Un **k -cociclo** $\omega \in Z_{\text{dR}}^k(M)$ de este complejo, que obedece $d\omega = 0$ por definición, es precisamente una **k -forma diferencial**

¹⁰Un endomorfismo lineal $d: A^\bullet \rightarrow A^\bullet$ de un álgebra graduada es una **derivación par** si $d(ab) = da b + a db$ para $a, b \in A$; es una **derivación impar** o **antiderivación** si $d(ab) = da b + (-1)^{\# a} a db$ para $a, b \in A$.

cerrada. Un **k -coborde** $\omega = d\beta \in B_{\text{dR}}^k(M)$, con $\beta \in \mathcal{A}^{k-1}(M)$, no es otra cosa que una k -forma diferencial exacta. Entonces $H_{\text{dR}}^k(M) := Z_{\text{dR}}^k(M)/B_{\text{dR}}^k(M)$ es el espacio \mathbb{R} -vectorial de k -formas diferenciales cerradas módulo k -formas exactas.

Obsérvese que $B_{\text{dR}}^0(M) = 0$ y $Z_{\text{dR}}^n(M) = \mathcal{A}^n(M)$ trivialmente. Una función $f \in \mathcal{A}^0(M)$ es un 0-cociclo ($df = 0$) si y solo si cada $\partial f / \partial x^j \equiv 0$, si y solo si f es *localmente constante*, esto es, constante en cada componente conexa de M . Entonces $H_{\text{dR}}^0(M) \simeq \mathbb{R}^N$ donde N es el número (cardinal) de las componentes conexas de M .

Lema 4.19 (Poincaré). $H_{\text{dR}}^0(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$; y $H_{\text{dR}}^k(\mathbb{R}^n) = 0$ para $k = 1, \dots, n$.

Demostración. En \mathbb{R}^n se usa coordenadas cartesianas globales $x = (x^1, \dots, x^n)$. Se obtiene $H^0(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$ porque \mathbb{R}^n es conexo.

Para $k \in \{1, \dots, n\}$, defínase un operador lineal $h_k: \mathcal{A}^k(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{A}^{k-1}(\mathbb{R}^n)$ por la fórmula

$$h_k \omega := \sum_{|I|=k} E_{k-1} \omega_I(x) \sum_{r=1}^k (-1)^{r-1} x^{i_1} dx^{i_2} \wedge \dots \wedge \widehat{dx^{i_r}} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \equiv \sum_{|I|=k} E_{k-1} \omega_I(x) \sigma^I,$$

donde

$$E_{k-1} f(x) := \int_0^1 t^{k-1} f(tx) dt.$$

Fíjese que $d(\sigma^I) = k dx^I$ y que

$$\frac{\partial}{\partial x^j} (E_{k-1} f)(x) = \int_0^1 t^k \frac{\partial f}{\partial x^j}(tx) dt = E_k \left(\frac{\partial f}{\partial x^j} \right)(x).$$

Entonces:

$$\begin{aligned} d(h_k \omega) &= \sum_{|I|=k} d(E_{k-1} \omega_I) \wedge \sigma^I + E_{k-1} \omega_I d\sigma^I = \sum_{|I|=k} \left(\sum_{j=1}^n E_k \left(\frac{\partial \omega_I}{\partial x^j} \right) dx^j \wedge \sigma^I + k E_{k-1} \omega_I dx^I \right), \\ h_{k+1}(d\omega) &= h_{k+1} \left(\sum_{|I|=k} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \omega_I}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^I \right) = \sum_{|I|=k} \sum_{j=1}^n E_k \left(\frac{\partial \omega_I}{\partial x^j} \right) (x^j dx^I - dx^j \wedge \sigma^I). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$d(h_k \omega) + h_{k+1}(d\omega) = \sum_{|I|=k} \left(k E_{k-1} \omega_I + \sum_{j=1}^n x^j E_k \left(\frac{\partial \omega_I}{\partial x^j} \right) \right) dx^I.$$

Los términos de esta sumatoria sobre I son

$$\begin{aligned} k(E_{k-1} \omega_I)(x) + \sum_{j=1}^n x^j E_k \left(\frac{\partial \omega_I}{\partial x^j} \right)(x) &= \int_0^1 \left(k t^{k-1} \omega_I(tx) + \sum_{j=1}^n t^k x^j \frac{\partial \omega_I}{\partial x^j}(tx) \right) dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} (t^k \omega_I(tx)) dt = t^k \omega_I(tx) \Big|_{t=0}^{t=1} = \omega_I(x), \end{aligned}$$

usando el “teorema fundamental del cálculo”. En resumen,

$$d(h_k \omega) + h_{k+1}(d\omega) = \omega \quad \text{para todo } \omega \in \mathcal{A}^k(\mathbb{R}^n).$$

Esto dice que los operadores h_k constituyen una *homotopía de cocadenas* entre 1^\bullet y 0^\bullet (el operador identidad y el operador nulo sobre $\mathcal{A}^\bullet(\mathbb{R}^n)$). Entonces, por el Lema 1.35 (para cocadenas) $1^* = 0^*$ sobre $H_{\text{dR}}^k(\mathbb{R}^n)$ y por ende $H_{\text{dR}}^k(\mathbb{R}^n) = 0$ para $k \geq 1$. \square

La homotopía de cadenas $\{h_k\}$ es el reflejo de la homotopía (topológica) $F(x, t) := tx$ entre la identidad $x \mapsto x$ de \mathbb{R}^n y la función constante $x \mapsto 0 \in \mathbb{R}^n$. Si una variedad M es *contractible* (1_M homotópica a una función $x \mapsto x_0$), la demostración anterior puede modificarse para comprobar que $H_{\text{dR}}^k(M) = 0$ para $k \geq 1$.

A continuación, se indica una demostración alternativa del Lema de Poincaré por inducción sobre n , al comprobar que $H^k(M \times \mathbb{R}) \simeq H^k(M)$ para toda variedad n -dimensional M y cada $k = 0, 1, \dots, n$.

► Si $f: M \rightarrow N$ es una función diferenciable, hay un morfismo $f^*: \mathcal{A}^k(N) \rightarrow \mathcal{A}^k(M)$ dado en coordenadas locales $y = f(x)$ por

$$\eta(y) = \sum_{|I|=k} \eta_I(y) dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_k}, \quad f^*\eta(x) := \sum_{|I|=k} \eta_I(f(x)) df^{i_1} \wedge \dots \wedge df^{i_k}. \quad (4.9)$$

La regla de la cadena $\partial(\eta_I \circ f)/\partial x^j = \sum_{i=1}^n (\partial \eta_I / \partial y^i)(\partial y^i / \partial x^j)$ muestra que $d(f^*\eta) = f^*(d\eta)$, de manera que el **pullback** $f^*: \mathcal{A}^\bullet(N) \rightarrow \mathcal{A}^\bullet(M)$ es un morfismo de complejos (de grado 0) e induce aplicaciones \mathbb{R} -lineales $f^\otimes: H_{\text{dR}}^k(N) \rightarrow H_{\text{dR}}^k(M)$ para cada k .¹¹

En una carta local $U \times \mathbb{R}$ de la variedad $M \times \mathbb{R}$, denótese las coordenadas locales por $(x, t) = (x^1, \dots, x^n, t)$ con $t \in \mathbb{R}$. Considérese las funciones

$$\begin{aligned} \pi: M \times \mathbb{R} &\rightarrow M: (x, t) \mapsto x, \\ s: M &\rightarrow M \times \mathbb{R}: x \mapsto (x, 0). \end{aligned}$$

Obviamente $\pi \circ s = 1_M$ pero $s \circ \pi: (x, t) \mapsto (x, 0)$ no coincide con $1_{M \times \mathbb{R}}$.

Proposición 4.20. *Si M es una variedad n -dimensional, $\pi^\otimes: H_{\text{dR}}^k(M) \rightarrow H_{\text{dR}}^k(M \times \mathbb{R})$ es un isomorfismo \mathbb{R} -lineal, para $k = 0, 1, \dots, n$.*

Demostración. La correspondencia $M \mapsto \mathcal{A}^\bullet(M)$, $f \mapsto f^*$ es un funtor contravariante entre la categoría Diff de variedades diferenciales y la categoría DGA \mathbb{R} de álgebras diferenciales graduadas reales. Entonces $s^*\pi^* = 1$ sobre $\mathcal{A}^\bullet(M)$ pero $\pi^*s^* \neq 1$ sobre $\mathcal{A}^\bullet(M \times \mathbb{R})$.

¹¹La notación usual para el pullback en cohomología es $f^*: H_{\text{dR}}^k(N) \rightarrow H_{\text{dR}}^k(M)$; pero aquí es preferible distinguir entre los morfismos f^* de k -formas y los morfismos f^\otimes de cohomologías.

Sin embargo, al pasar a cohomología, se verá enseguida que $s^{\otimes} \pi^{\otimes} = 1$ sobre $H_{\text{dR}}^{\bullet}(M)$ y también $\pi^{\otimes} s^{\otimes} = 1$ sobre $H_{\text{dR}}^{\bullet}(M \times \mathbb{R})$; por lo tanto, π^{\otimes} es un isomorfismo, con inverso s^{\otimes} :

$$M \times \mathbb{R} \xrightleftharpoons[s]{\pi} M, \quad \mathcal{A}^{\bullet}(M \times \mathbb{R}) \xrightleftharpoons[s^*]{\pi^*} \mathcal{A}^{\bullet}(M), \quad H_{\text{dR}}^{\bullet}(M \times \mathbb{R}) \xrightleftharpoons[s^{\otimes}]{\pi^{\otimes}} H_{\text{dR}}^{\bullet}(M).$$

La igualdad $s^{\otimes} \pi^{\otimes} = 1$ es obvia; para comprobar $\pi^{\otimes} s^{\otimes} = 1$, basta exhibir una *homotopía de cocadenas* entre $\pi^* s^*$ y la identidad de $\mathcal{A}^{\bullet}(M \times \mathbb{R})$.

Cualquier k -forma $\omega \in \mathcal{A}^k(M \times \mathbb{R})$ tiene una expresión local en $U \times \mathbb{R}$ del siguiente tipo:

$$\omega = f(x, t) \pi^* \alpha + g(x, t) dt \wedge \pi^* \beta, \quad (4.10)$$

donde $f, g \in C^{\infty}(U \times \mathbb{R})$, $\alpha \in \mathcal{A}^k(M)$, $\beta \in \mathcal{A}^{k-1}(M)$. Defínase $K: \mathcal{A}^k(M \times \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{A}^{k-1}(M \times \mathbb{R})$ por las fórmulas:¹²

$$K(f(x, t) \pi^* \alpha) := 0, \quad K(g(x, t) dt \wedge \pi^* \beta) := \left(\int_0^t g(x, s) ds \right) \pi^* \beta.$$

Para k -formas de tipo $\omega = f \pi^* \alpha$, $K(\omega) = 0$ mientras

$$d\omega = \frac{\partial f}{\partial t} dt \wedge \pi^* \alpha + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^j} \pi^*(dx^j \wedge \alpha) + f \pi^*(d\alpha),$$

así que

$$\begin{aligned} (dK + Kd)(\omega) &= K(d\omega) = \left(\int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(x, s) ds \right) \pi^* \alpha = (f(x, t) - f(x, 0)) \pi^* \alpha \\ &= (1 - \pi^* s^*)(\omega). \end{aligned}$$

En cambio, para formas de tipo $\omega = g dt \wedge \pi^* \beta$, resulta que

$$d\omega = - \sum_{j=1}^n \frac{\partial g}{\partial x^j} dt \wedge \pi^*(dx^j \wedge \beta) - g dt \wedge \pi^*(d\beta),$$

mientras $s^* \omega = g(x, 0) s^*(dt) \wedge \beta = 0$ porque $s^*(dt) = d(s^*(t)) = d(0) = 0$; en este caso, entonces, $(1 - \pi^* s^*)(\omega) = \omega$. Ahora

$$\begin{aligned} dK(\omega) &= g(x, t) dt \wedge \pi^* \beta + \sum_{j=1}^n \left(\int_0^t \frac{\partial g}{\partial x^j}(x, s) ds \right) \pi^*(dx^j \wedge \beta) + \left(\int_0^t g(x, s) ds \right) \pi^*(d\beta), \\ K(d\omega) &= - \sum_{j=1}^n \left(\int_0^t \frac{\partial g}{\partial x^j}(x, s) ds \right) \pi^*(dx^j \wedge \beta) - \left(\int_0^t g(x, s) ds \right) \pi^*(d\beta), \end{aligned}$$

¹²La fórmula dada obra sobre la carta local $U \times \mathbb{R}$. Para extenderla a toda $M \times \mathbb{R}$, hace falta descomponer ω en una suma $\omega = \sum_j h_j \omega_j$ donde cada $h_j \in C^{\infty}(M \times \mathbb{R})$, cada $h_j \geq 0$ con $h_j \equiv 0$ fuera de cierta carta $U_j \times \mathbb{R}$, y $\sum_j h_j \equiv 1$ sobre $M \times \mathbb{R}$. (El juego de funciones $\{h_j\}$ es una **partición de la unidad**.) La “fórmula local” dada para K es compatible con esa descomposición: basta chequear su propiedad de homotopía carta por carta.

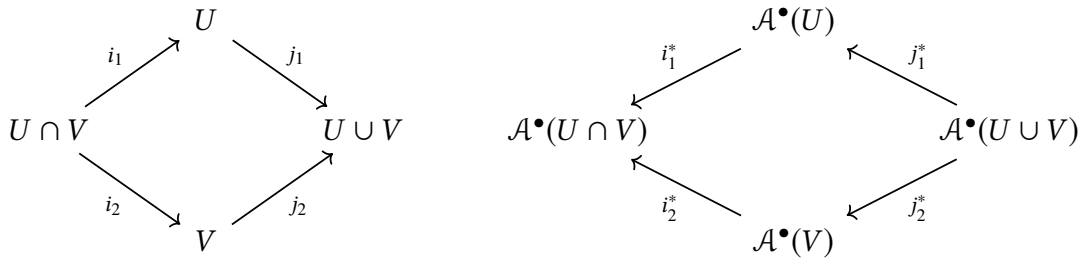
de donde $(dK + Kd)(\omega) = g(x, t) dt \wedge \pi^* \beta = \omega$.

La conclusión es que $(dK + Kd)(\omega) = (1 - \pi^* s^*)(\omega)$ para todo $\omega \in \mathcal{A}^\bullet(M \times \mathbb{R})$. Luego K es una homotopía de cocadenas entre 1 y $\pi^* s^*$. El Lema 1.35 (para cocadenas) muestra que $\pi^* s^* = 1$ sobre $H_{\text{dR}}^\bullet(M \times \mathbb{R})$. Por lo tanto, π^* es un isomorfismo, con inverso s^* . \square

Corolario 4.21. Para todo $k, n \in \mathbb{N}$, vale $H_{\text{dR}}^k(\mathbb{R}^n) \simeq H_{\text{dR}}^k(\mathbb{R}^0)$, así que $H_{\text{dR}}^k(\mathbb{R}^n) = 0$ para $k \geq 1$ y $H_{\text{dR}}^0(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$. $\llbracket \mathbb{R}^0 \text{ es un punto. } \rrbracket$

► El cálculo explícito de los grupos de cohomología de de Rham se facilita por una relación entre los grupos de cohomología de dos abiertos, su unión y su intersección.¹³

Definición 4.22. Sean U y V dos abiertos en una variedad diferencial M . Las inclusiones $i_1: U \cap V \rightarrow U$, $i_2: U \cap V \rightarrow V$, $j_1: U \rightarrow U \cup V$, $j_2: V \rightarrow U \cup V$ inducen restricciones $i_1^*: \mathcal{A}^\bullet(U) \rightarrow \mathcal{A}^\bullet(U \cap V)$, etcétera, así:



La sucesión exacta corta de Mayer y Vietoris es la siguiente:

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}^\bullet(U \cup V) \xrightarrow{j} \mathcal{A}^\bullet(U) \oplus \mathcal{A}^\bullet(V) \xrightarrow{p} \mathcal{A}^\bullet(U \cap V) \longrightarrow 0, \quad (4.11)$$

con los morfismos de complejos $j(\omega) := (j_1^* \omega, j_2^* \omega)$ y $p(\alpha, \beta) := i_1^* \alpha - i_2^* \beta$. \diamond

Para comprobar que la sucesión corta (4.11) es exacta, fíjese que si $\omega \neq 0$ en $\mathcal{A}^\bullet(U \cup V)$, al menos una de las restricciones $j_1^* \omega = \omega \upharpoonright U$, $j_2^* \omega = \omega \upharpoonright V$ debe ser no nula; luego j es inyectiva. Como $i_1^* j_1^* = i_2^* j_2^*$ es la transpuesta de la inclusión $j_1 i_1 = j_2 i_2: U \cap V \hookrightarrow U \cup V$, se ve que $pj = 0$, es decir, $\text{im } j \subseteq \ker p$. Por otro lado, si $(\alpha, \beta) \in \ker p$, entonces $\alpha \upharpoonright U = \beta \upharpoonright V$, así que α y β se combinan para definir $\omega \in \mathcal{A}^\bullet(U \cup V)$ tal que $j_1^* \omega = \alpha$, $j_2^* \omega = \beta$; así, $\ker p \subseteq \text{im } j$.

Para ver que p es sobreyectivo, se puede encontrar dos funciones suaves $h_1, h_2 \in C^\infty(U \cup V)$ tales que $\text{sop } h_1 \subset U$ y $\text{sop } h_2 \subset V$ y $h_1 + h_2 \equiv 1$ sobre $U \cup V$.¹⁴ Dada una k -forma $\eta \in \mathcal{A}^k(U \cap V)$, $h_2 \eta$ se extiende por cero a $\alpha \in \mathcal{A}^k(U)$ porque $h_2(x) = 0$ para $x \in U \setminus V$. De la misma manera, $h_1 \eta$ se extiende por cero a una k -forma $\beta \in \mathcal{A}^k(V)$. Entonces $p(\alpha, -\beta) = h_2 \eta + h_1 \eta = (h_2 + h_1) \eta = \eta$.

¹³Esta relación fue observada por Walther Mayer en 1929, en colaboración con Leopold Vietoris (1891–2002). El año siguiente, Vietoris la extendió a un teorema de homología simplicial.

¹⁴Aquí $\{h_1, h_2\}$ es una partición suave de la unidad, subordinada al cubrimiento abierto $\{U_1, U_2\}$ de $U \cup V$.

Teorema 4.23. Sean U y V dos abiertos en una variedad diferencial M . Hay una **sucesión exacta larga de Mayer y Vietoris**:

$$\cdots \longrightarrow H_{\text{dR}}^k(U \cup V) \xrightarrow{j^*} H_{\text{dR}}^k(U) \oplus H_{\text{dR}}^k(V) \xrightarrow{p^*} H_{\text{dR}}^k(U \cap V) \xrightarrow{\delta} H_{\text{dR}}^{k+1}(U \cup V) \longrightarrow \cdots \quad (4.12)$$

cuyo homomorfismo conector $\delta[\omega] := [\xi]$ lleva la clase de una forma cerrada $\omega \in Z_{\text{dR}}^k(U \cap V)$ a la clase de $\xi \in Z_{\text{dR}}^{k+1}(U \cup V)$ determinado por $\xi \upharpoonright U = d(h_2\omega)$ y $\xi \upharpoonright V = -d(h_1\omega)$.

Demostración. Basta aplicar el Escolio 1.30 a la sucesión exacta corta (4.11). La fórmula para el homomorfismo conector sigue el protocolo del Lema de la culebra; se deja su verificación como ejercicio. Fíjese, en particular, que la clase $[\xi] \in H_{\text{dR}}^{k+1}(U \cup V)$ no depende de la partición de la unidad $\{h_1, h_2\}$ usada para expresar su representante ξ . \square

Ejemplo 4.24. La n -esfera

$$\mathbb{S}^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : (x^1)^2 + \cdots + (x^{n+1})^2 = 1\}$$

es una variedad n -dimensional compacta. Se puede tomar $\mathbb{S}^n = U \cup V$ donde

$$U := \{x \in \mathbb{S}^n : -\frac{1}{2} < x^{n+1} \leq 1\}, \quad V := \{x \in \mathbb{S}^n : -1 \leq x^{n+1} < \frac{1}{2}\}.$$

Entonces la banda ecuatorial $U \cap V$ es difeomorfa bien a $\mathbb{S}^{n-1} \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ o bien a $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$. De la Proposición 4.20, se deduce $H_{\text{dR}}^k(U \cap V) \simeq H_{\text{dR}}^k(\mathbb{S}^{n-1})$.

Las capas hemisféricas U y V son contractibles, así que $H_{\text{dR}}^k(U) \oplus H_{\text{dR}}^k(V) = 0$ para $k \geq 1$. Entonces la sucesión exacta larga de Mayer y Vietoris (4.12) se descompone en pedazos $0 \longrightarrow H_{\text{dR}}^k(U \cap V) \xrightarrow{\delta} H_{\text{dR}}^{k+1}(U \cup V) \longrightarrow 0$, así que

$$H_{\text{dR}}^k(\mathbb{S}^{n-1}) \simeq H_{\text{dR}}^k(U \cap V) \simeq H_{\text{dR}}^{k+1}(U \cup V) \simeq H_{\text{dR}}^{k+1}(\mathbb{S}^n), \quad \text{para } k \geq 1.$$

[[El pedazo inicial es excepcional, porque $H_{\text{dR}}^0(U) \oplus H_{\text{dR}}^0(V) \simeq \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ si $n \geq 2$.]] \diamond

Ejemplo 4.25. En el caso del círculo \mathbb{S}^1 , nótese que la “0-esfera” $\mathbb{S}^0 := \{-1, +1\} \subset \mathbb{R}$ tiene dos componentes conexas, así que $H_{\text{dR}}^0(U \cap V) \simeq H_{\text{dR}}^0(\mathbb{S}^0) \simeq \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$. Además, $H_{\text{dR}}^1(U \cap V) \simeq H_{\text{dR}}^1(\mathbb{S}^0) \simeq H_{\text{dR}}^2(\mathbb{S}^1) = 0$ porque $\mathcal{A}^2(\mathbb{S}^1) = 0$. Entonces la sucesión exacta larga de Mayer y Vietoris tiene cuatro términos no nulos:

$$0 \longrightarrow H_{\text{dR}}^0(\mathbb{S}^1) \xrightarrow{j^*} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{p^*} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{\delta} H_{\text{dR}}^1(\mathbb{S}^1) \longrightarrow 0.$$

Explícitamente, una 0-forma cerrada en $Z_{\text{dR}}^0(\mathbb{S}^1)$ es una función constante c . De las fórmulas que definen los morfismos j y p en el complejo (4.11), se deduce que

$$j^*[c] = (c, c) \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}; \quad p^*(a, b) = (a - b, a - b) \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{R},$$

así que $\text{im } p^* \simeq \mathbb{R}$ y por ende $\ker p^* \simeq \mathbb{R}$ (por el teorema de rango y nulidad). En conclusión:

$$H_{\text{dR}}^0(\mathbb{S}^1) = \ker p^* \simeq \mathbb{R}, \quad H_{\text{dR}}^1(\mathbb{S}^1) = \text{coker } p^* \simeq \mathbb{R}. \quad \diamond$$

► Una variante importante de la cohomología de de Rham es la *cohomología con soporte compacto*, obtenida al restringir el ámbito a aquellas formas diferenciales cuyo soporte es compacto. Se debe recordar que el **soporte** de una función continua $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ (sobre un espacio topológico X) es el conjunto cerrado¹⁵

$$\text{sop } f := \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}.$$

Dícese que f tiene **soporte compacto** si $\text{sop } f$ es una parte compacta de X . Si M es una variedad diferencial, la totalidad de *funciones suaves de soporte compacto* $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ se denota por $C_c^\infty(M, \mathbb{R})$. \llbracket Esta es una \mathbb{R} -álgebra conmutativa y también un módulo sobre $C^\infty(M, \mathbb{R})$: porque si $f, g \in C_c^\infty(M, \mathbb{R})$, entonces $\text{sop}(fg) \subseteq (\text{sop } f) \cap (\text{sop } g)$. \rrbracket

Definición 4.26. Sea M una variedad diferencial real, de dimensión n . Las **formas diferenciales de soporte compacto** sobre M de grado $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ son los elementos de

$$\mathcal{A}_c^k(M) := C_c^\infty(M, \mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \Lambda^k(\mathbb{R}^n).$$

Una k -forma con soporte compacto es una suma finita de k -formas locales $\omega = \sum_{|I|=k} \omega_I(x) dx^I$ donde cada ω_I tiene soporte compacto en una carta local $U \subseteq M$; la unión de todos estos $\text{sop } \omega_I$ es el soporte de ω . Entonces la fórmula (4.7) muestra que $\text{sop}(d\omega) \subseteq \text{sop } \omega$. Por lo tanto, $(\mathcal{A}_c^\bullet(M), d)$ es un módulo diferencial sobre $C^\infty(M, \mathbb{R})$. Su cohomología es, por definición, la **cohomología con soporte compacto** de la variedad diferencial M :

$$H_c^k(M) := Z_c^k(M) / B_c^k(M), \quad (4.13)$$

donde $Z_c^k(M) := \ker(d: \mathcal{A}_c^k(M) \rightarrow \mathcal{A}_c^{k+1}(M))$; y $B_c^k(M) := \text{im}(d: \mathcal{A}_c^{k-1}(M) \rightarrow \mathcal{A}_c^k(M))$. \diamond

Si M es una variedad compacta, entonces $C_c^\infty(M, \mathbb{R})$ coincide con $C^\infty(M, \mathbb{R})$ y las cohomologías $H_c^\bullet(M)$ y $H_{\text{dR}}^\bullet(M)$ también coinciden. Entonces lo que interesa es el caso de variedades no compactas. De inmediato se puede ver que estas cohomologías difieren en el caso $M = \mathbb{R}$.

Lema 4.27. $H_c^0(\mathbb{R}) = 0$ y $H_c^1(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Demostración. Una función suave $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $dh = 0$ (esto es, un 0-cociclo sobre \mathbb{R}) es una función constante; pero la única función constante *con soporte compacto* es $h \equiv 0$. Luego $H_c^0(\mathbb{R}) = Z_c^0(\mathbb{R}) = 0$.

Por otro lado, cada $\alpha = g(t) dt \in Z_c^1(\mathbb{R})$ tiene una integral $I(\alpha) := \int_{\mathbb{R}} g(t) dt \in \mathbb{R}$. Esto define un funcional lineal $I: Z_c^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, obviamente sobreyectivo. Si $\alpha = df$ con $\text{sop}(f) \subseteq [a, b] \subset \mathbb{R}$, entonces

$$I(\alpha) = \int_{\mathbb{R}} f'(t) dt = \int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a) = 0 - 0 = 0,$$

¹⁵El soporte puede definirse de otra manera, con una doble negativa: $\text{sop } f$ es el complemento del mayor abierto $U \subseteq X$ tal que $f|_U$ es idénticamente cero. Para funciones continuas, las dos definiciones coinciden.

así que $B_c^1(\mathbb{R}) \subseteq \ker I$. Por otro lado, si $g(t) dt \in \ker I$ con $\text{sop } g \subseteq [c, d]$, entonces la primitiva

$$f(t) := \int_{-\infty}^t g(s) ds = \int_c^t g(s) ds$$

cumple $df = g(t) dt$ y $I(df) = \int_c^d g(t) dt = 0$, lo cual implica que $f(t) \equiv f(d) = 0$ para $t \geq d$. En otras palabras, $\text{sop } f \subseteq [c, d]$ también, así que $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ y la 1-forma df es exacta.

Se ha comprobado que $B_c^1(\mathbb{R}) = \ker I$. Luego, $H_c^1(\mathbb{R}) = \text{coim } I = \text{im } I = \mathbb{R}$. \square

Nótese el contraste del Lema 4.27 con el del Lema 4.19 de Poincaré: $H_{\text{dR}}^0(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ y $H_{\text{dR}}^1(\mathbb{R}) = 0$.

Para obtener $H_c^\bullet(\mathbb{R}^n)$, se requiere una versión del lema de Poincaré para cohomología de soporte compacto. De hecho, hay un argumento de homotopía que compara las cohomologías de las variedades M y $M \times \mathbb{R}$, en paralelo a la Proposición 4.20, pero con una diferencia importante: *la nueva correspondencia conlleva un desplazamiento de grado*. El uso del pullback $\omega \mapsto \pi^*\omega$ dada por (4.9) no es apropiado, porque esa operación no conserva compacidad de soportes.

Definición 4.28. Sea $\omega \in \mathcal{A}_c^k(M \times \mathbb{R})$ con expresión local $\omega = f(x, t) \pi^*\alpha + g(x, t) dt \wedge \pi^*\beta$, de tipo (4.10), donde las funciones coeficientes tienen soportes compactos en la carta $U \times \mathbb{R}$. Defínase un homomorfismo $\pi_*: \mathcal{A}_c^k(M \times \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{A}_c^{k-1}(M)$ así:

$$\pi_*(f \pi^*\alpha) := 0, \quad \pi_*(g dt \wedge \pi^*\beta) := \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(x, s) ds \right) \beta.$$

Este **pushout** π_* , también llamado **integración a lo largo de la fibra**,¹⁶ anticonmuta con la diferencial, $d(\pi_*\omega) = -\pi_*(d\omega)$, como se chequea fácilmente. En consecuencia, π_* induce un homomorfismo bien definido $\pi_\otimes: H_c^k(M \times \mathbb{R}) \rightarrow H_c^{k-1}(M)$. \diamond

Un inverso a derecha para π_* viene dado por un 1-forma $\beta = b(t) dt \in \mathcal{A}_c^1(\mathbb{R})$ tal que $\int_{\mathbb{R}} b(s) ds = 1$. Entonces se define $\beta_*: \mathcal{A}_c^k(M) \rightarrow \mathcal{A}_c^{k+1}(M \times \mathbb{R})$ por

$$\beta_*\eta := \beta \wedge \pi^*\eta.$$

Es inmediato que $d(\beta_*\eta) = -\beta_*(d\eta)$. Por ende, β_* induce un homomorfismo bien definido $\beta_\otimes: H_c^k(M) \rightarrow H_c^{k+1}(M \times \mathbb{R})$.

Obsérvese que $\pi_*\beta_*(\eta) = \pi_*(b dt \wedge \pi^*\eta) = \eta$ porque $\int_{\mathbb{R}} b(s) ds = 1$. Entonces $\pi_\otimes\beta_\otimes = 1$ sobre $H_c^\bullet(M)$.

¹⁶La terminología viene de considerar $M \times \mathbb{R}$ como un fibrado vectorial trivial, con fibra \mathbb{R} , sobre la base M . Resulta que cada $\omega \in \mathcal{A}_c^k(M \times \mathbb{R})$ es una suma *finita* de formas locales del tipo exhibido, así que π_* está bien definido por estas fórmulas locales.

Para obtener la relación $\beta_{\otimes} \pi_{\otimes} = 1$ sobre $H_c^{\bullet}(M \times \mathbb{R})$, solo hace falta definir una homotopía de cocadenas entre $\beta_* \pi_*$ y la identidad en $\mathcal{A}_c^{\bullet}(M \times \mathbb{R})$. Sea $B(t) := \int_{-\infty}^t b(s) ds$ la integral indefinida de β , y defínase $L: \mathcal{A}_c^k(M \times \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{A}_c^{k-1}(M \times \mathbb{R})$ por

$$L(f \pi^* \alpha) := 0, \quad L(g dt \wedge \pi^* \beta) := \left(\int_{-\infty}^t g(x, s) ds - B(t) \int_{-\infty}^{\infty} g(x, s) ds \right) \pi^* \beta.$$

[[Si $K \subset M$ es compacto y $[c, d] \subset \mathbb{R}$ es un intervalo compacto tales que $\text{sop } g \subseteq K \times [c, d]$ y $\text{sop } b \subseteq [c, d]$, entonces $B(t) = 1$ para $t \geq d$; y la cantidad entre paréntesis a la derecha es una función suave con soporte (compacto) en $K \times [c, d]$ también.]]

Escolio 4.29. La fórmula $(dL + Ld)(\omega) = (1 - \beta_* \pi_*)(\omega)$ es válida para todo $\omega \in \mathcal{A}_c^{\bullet}(M \times \mathbb{R})$.

En consecuencia, $\pi_{\otimes}: H_c^k(M \times \mathbb{R}) \rightarrow H_c^{k-1}(M)$ es un isomorfismo \mathbb{R} -lineal, para cada $k = 1, \dots, n$. \square

Fíjese que $H_c^0(M) = Z_c^0(M)$ es el espacio R -vectorial de funciones localmente constantes con soporte compacto. Entre las componentes conexas de M , puede haber unas compactas y otras no compactas. Entonces $\dim_{\mathbb{R}} H_c^0(M)$ es el número de componentes conexas compactas.

Corolario 4.30. $H_c^k(\mathbb{R}^n) = 0$ para $k = 0, 1, \dots, n-1$; pero $H_c^n(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$. \square

Entre otras cosas, este corolario muestra que la cohomología con soportes compactos no es invariante bajo homotopías topológicas, porque cada \mathbb{R}^n es homotópico al origen \mathbb{R}^0 .

► Como los morfismos pullback $\omega \mapsto f^* \omega$ no conservan compacidad de soportes, no es posible imitar las sucesiones de Mayer y Vietoris (4.11) y (4.12) por analogía directa. Dichas sucesiones son contravariantes con respecto a las inclusiones $U \cap V \rightrightarrows \{U, V\} \rightrightarrows U \cup V$ de la Definición 4.22. Sin embargo, hay una variante del formalismo de Mayer y Vietoris, que es *covariante* con respecto a esas inclusiones – usando funtores covariantes desde la categoría $\text{Top-}M$ de abiertos de M cuyos morfismos son únicamente las inclusiones de abiertos.

Definición 4.31. Sean U y V dos abiertos en una variedad diferencial M . Si $U \subseteq V$, sea $i: U \hookrightarrow V$ la inclusión; para $\omega \in \mathcal{A}_c^k(U)$, sea $i_* \omega \in \mathcal{A}_c^k(V)$ la k -forma que coincide con ω sobre U y es idénticamente nula sobre $V \setminus \text{sop } \omega$. Esta “extensión por cero” define un funtor covariante de $\text{Top-}M$ en $\text{DGA}_{\mathbb{R}}$.

Para dos abiertos cualesquiera $U, V \subseteq M$, hay un par de diagramas conmutativos:

$$\begin{array}{ccc} & U & \\ i_1 \nearrow & & \searrow j_1 \\ U \cap V & & U \cup V \\ i_2 \searrow & & \nearrow j_2 \\ & V & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & \mathcal{A}_c^{\bullet}(U) & \\ i_{1*} \nearrow & & \searrow j_{1*} \\ \mathcal{A}_c^{\bullet}(U \cap V) & & \mathcal{A}_c^{\bullet}(U \cup V) \\ i_{2*} \searrow & & \nearrow j_{2*} \\ & \mathcal{A}_c^{\bullet}(V) & \end{array}$$

La sucesión exacta corta de Mayer y Vietoris con soportes compactos es la siguiente:

$$0 \longleftarrow \mathcal{A}_c^\bullet(U \cup V) \xleftarrow{q} \mathcal{A}_c^\bullet(U) \oplus \mathcal{A}_c^\bullet(V) \xleftarrow{i} \mathcal{A}_c^\bullet(U \cap V) \longleftarrow 0, \quad (4.14)$$

con los morfismos de complejos $i(\omega) := (i_{1*}\omega, -i_{2*}\omega)$ y $q(\alpha, \beta) := j_{1*}\alpha + j_{2*}\beta$. \diamond

Escolio 4.32. La sucesión corta (4.14) es exacta. \boxminus

Escolio 4.33. Sean U y V dos abiertos en una variedad diferencial M . Hay una *sucesión exacta larga de Mayer y Vietoris con soportes compactos*:

$$\cdots \longleftarrow H_c^{k+1}(U \cap V) \xleftarrow{\delta} H_c^k(U \cup V) \xleftarrow{q_*} H_c^k(U) \oplus H_c^k(V) \xleftarrow{i_*} H_c^k(U \cap V) \longleftarrow \cdots \quad (4.15)$$

cuyo homomorfismo conector δ se define así: si $\eta \in Z_c^k(U \cup V)$ es una k -forma cerrada, con una partición de la unidad $\{h_1, h_2\}$ subordinada al cubrimiento abierto $\{U, V\}$, se puede expresar $\eta = \eta_1 + \eta_2 := j_{1*}(h_1\eta) + j_{2*}(h_2\eta)$ con $\eta_1 \in \mathcal{A}_c^k(U)$, $\eta_2 \in \mathcal{A}_c^k(V)$; y $d\eta = 0$ implica $d\eta_1 = -d\eta_2$ sobre $U \cap V$; entonces $\delta[\eta] = [d\eta_1] = -[d\eta_2]$ en $H_c^{k+1}(U \cap V)$. \boxminus

Ejemplo 4.34. La cohomología con soporte compacto del círculo \mathbb{S}^1 coincide con la cohomología ordinaria calculado en el Ejemplo 4.25, porque \mathbb{S}^1 es compacto. Al tomar U, V como en ese ejemplo, el Lema 4.27 implica que $H_c^0(U \cap V) = H_c^0(U) = H_c^0(V) = 0$ y $H_c^1(U) = H_c^1(V) = H_c^1(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Además, $H_c^1(U \cap V) \simeq H_c^1(\mathbb{R} \uplus \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$.

Entonces la sucesión exacta larga (4.15) para el círculo es

$$0 \longleftarrow H_c^1(\mathbb{S}^1) \xleftarrow{q_*} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xleftarrow{i_*} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xleftarrow{\delta} H_c^0(\mathbb{S}^1) \longleftarrow 0.$$

Al considerar la “extensión por cero” $i_*[\omega] = (i_{1*}[\omega], -i_{2*}[\omega]) \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$, se nota que $\text{im } i_*$ es unidimensional. Por la exactitud de la última sucesión, se concluye que

$$H_c^0(\mathbb{S}^1) = \ker i_* \simeq \mathbb{R}, \quad H_c^1(\mathbb{S}^1) = \text{coker } i_* \simeq \mathbb{R},$$

en consonancia con el resultado del Ejemplo 4.25. \diamond

► La motivación para introducir esta segunda sucesión de Mayer y Vietoris es *un teorema de dualidad abordado por Poincaré* (en el caso de variedades compactas orientadas).¹⁷ Este teorema admite varias reformulaciones; para variedades no necesariamente compactas, involucra una comparación entre las dos versiones de cohomología, en dimensiones complementarias.

¹⁷En su artículo *Analysis Situs* (1895), Poincaré dio una demostración parcial de que los *números de Betti* $b_k := \dim H^k(M, \mathbb{R})$ de una variedad compacta orientada de dimensión n obedecen la relación de simetría $b_k = b_{n-k}$. Véase el libro de Dieudonné, pp. 21–22.

Una variedad diferencial n -dimensional es **orientable** si posee una n -forma ν (la *orientación*) que no se anula – es decir, cualquier versión local $\nu = \nu(x) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ tiene $\nu(x) \neq 0$ para todo $x \in U$. Entonces cualquier otra n -forma puede expresarse como $\omega = g \nu$ con $g \in C^\infty(M)$. La importancia de la orientabilidad es que permite una definición consistente de una *integral* sobre M de n -formas de soporte compacto:

$$\omega \mapsto \int_M \omega \in \mathbb{R}, \quad \text{para } \omega \in \mathcal{A}_c^n(M),$$

[[Aquí se omite la definición concreta de la integral mediante una suma de integrales ordinarias en cartas locales. Para la discusión actual, basta notar que \int_M es un funcional lineal bien definido sobre $\mathcal{A}_c^n(M)$, con $\int_M \nu > 0$; y que $\int_M d\eta = 0$ para todo $\eta \in \mathcal{A}_c^{n-1}(M)$ por el teorema de Stokes. (El contexto actual es la categoría Diff de variedades diferenciales *sin frontera*.)]]

Lema 4.35. *Sea M una variedad diferencial orientable (sin frontera). La fórmula siguiente define una función \mathbb{R} -bilineal sobre formas diferenciales cerradas:*

$$Z_{\text{dR}}^k(M) \times Z_c^{n-k}(M) \rightarrow \mathbb{R} : (\alpha, \beta) \mapsto \int_M \alpha \wedge \beta.$$

El lado derecho depende solamente de las clases de cohomología de α y β ; y así define una forma \mathbb{R} -bilineal:

$$H_{\text{dR}}^k(M) \times H_c^{n-k}(M) \rightarrow \mathbb{R} : ([\alpha], [\beta]) \mapsto \int_M \alpha \wedge \beta. \quad (4.16)$$

Demostración. Obsérvese que la forma diferencial β es una suma finita de formas locales $\sum_{|J|=n-k} \beta_J(x) dx^J$ con $\text{sop } \beta_J$ compacto en una carta U . Si $(\alpha \upharpoonright U) = \sum_{|I|=k} \alpha_I(x) dx^I$, entonces para $I = \{1, \dots, n\} \setminus J$ la relación $\text{sop}(\alpha_I \beta_J) \subseteq (\text{sop } \alpha_I) \cap (\text{sop } \beta_J)$ muestra que la n -forma $\alpha \wedge \beta$ tiene soporte compacto. Luego, la integral al lado derecho de (4.16) es finita y bien definida.

Sean $\xi \in \mathcal{A}^{k-1}(M)$ y $\eta \in \mathcal{A}_c^{n-k-1}(M)$. Entonces

$$\begin{aligned} (\alpha + d\xi) \wedge (\beta + d\eta) &= \alpha \wedge \beta + d\xi \wedge \beta + \alpha \wedge d\eta + d\xi \wedge d\eta \\ &= \alpha \wedge \beta + d(\xi \wedge \beta) + (-1)^{\# \alpha} d(\alpha \wedge \eta) + d(\xi \wedge d\eta) \end{aligned}$$

por el Escolio 4.17, puesto que $d\alpha = 0$ y $d\beta = d(d\eta) = 0$. Como \int_M se anula sobre $B_c^n(M)$ por el teorema de Stokes, se obtiene

$$\int_M (\alpha + d\xi) \wedge (\beta + d\eta) = \int_M \alpha \wedge \beta.$$

Esto dice que $\int_M \alpha \wedge \beta$ solo depende de $[\alpha] \in H_{\text{dR}}^k(M)$ y $[\beta] \in H_c^{n-k}(M)$. □

Una forma bilineal entre dos espacios vectoriales establece una aplicación lineal de uno de ellos al espacio dual del otro. De (4.16) se obtiene la aplicación \mathbb{R} -lineal:

$$\Pi_M : H_{\text{dR}}^k(M) \rightarrow H_c^{n-k}(M)^* \quad \text{dada por} \quad \Pi_M[\alpha] := \left([\beta] \mapsto \int_M \alpha \wedge \beta \right). \quad (4.17)$$

El teorema de dualidad de Poincaré afirma que Π_M es un *isomorfismo* \mathbb{R} -lineal.

En el contexto de la dualidad de espacios \mathbb{R} -vectoriales, conviene obtener una condición sobre M que garantiza que $H_{\text{dR}}^k(M)$ y $H_c^{n-k}(M)$ son *finitodimensionales*. Este es el caso si M es compacta. También es obvio, por los resultados ya obtenidos, si M es contractible (homotópico a un punto). La condición que garantiza la dimensión finita de estos espacios vectoriales y que luego conduce al teorema de dualidad, es la existencia de un buen cubrimiento finito de M , definido a continuación.

Definición 4.36. Sea M una variedad diferencial de dimensión n . Un cubrimiento abierto $\mathcal{U} = \{U_j : j \in J\}$ es un **buen cubrimiento** si cada intersección finita no vacía $U_{j_1} \cap \cdots \cap U_{j_r}$ es difeomorfa a \mathbb{R}^n .

Resulta que cualquier variedad M posee un buen cubrimiento (que puede tomarse como un refinamiento de un cubrimiento abierto dado).¹⁸ Si M es compacto, tiene un buen cubrimiento finito. (Muchas otras variedades no compactas, \mathbb{R}^n por ejemplo, también tienen buenos cubrimientos finitos.) \diamond

Si $\mathcal{U} = \{U_i : i = 1, \dots, m\}$ es un buen cubrimiento finito de M , entonces la familia de abiertos $\{U_i \cap U_m : i = 1, \dots, m-1\}$ es un buen cubrimiento de U_m . Esta observación y el uso de las sucesiones de Mayer y Vietoris facilitan una demostración inductiva del resultado siguiente.

Escolio 4.37. Si una variedad diferencial M posee un buen cubrimiento finito, entonces $H_{\text{dR}}^k(M)$ y $H_c^k(M)$ son espacios vectoriales finitodimensionales, para $k = 0, 1, \dots, \dim M$. \square

Es necesario comparar las dos sucesiones largas de Mayer y Vietoris (4.12) y (4.15) para dos abiertos $U, V \subset M$. Para compensar la direccionalidad opuesta de estas dos sucesiones, se requiere modificar la segunda de ellas al reemplazar cada espacio vectorial por su espacio dual y cada flecha (una aplicación \mathbb{R} -lineal) por su transpuesta, así:

$$\cdots \longrightarrow H_c^r(U \cup V)^* \xrightarrow{q_*^t} H_c^r(U)^* \oplus H_c^r(V)^* \xrightarrow{i_*^t} H_c^r(U \cap V)^* \xrightarrow{\delta^t} H_c^{r-1}(U \cup V)^* \longrightarrow \cdots$$

¹⁸Para la demostración, véase el Teorema 5.1 del libro de Bott y Tu; o bien el Teorema 8.5.7 del libro de Conlon, *op. cit.*

Proposición 4.38. Sean U y V dos abiertos en una variedad orientable M de dimensión n . El siguiente diagrama tiene filas exactas y es conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 H_{\text{dR}}^k(U \cup V) & \xrightarrow{j^*} & H_{\text{dR}}^k(U) \oplus H_{\text{dR}}^k(V) & \xrightarrow{p^*} & H_{\text{dR}}^k(U \cap V) & \xrightarrow{(-1)^{k+1}\delta} & H_{\text{dR}}^{k+1}(U \cup V) \\
 \Pi_{U \cup V} \downarrow & & (\Pi_U, \Pi_V) \downarrow & & \Pi_{U \cap V} \downarrow & & \Pi_{U \cup V} \downarrow \\
 H_c^{n-k}(U \cup V)^* & \xrightarrow{q_*^t} & H_c^{n-k}(U)^* \oplus H_c^{n-k}(V)^* & \xrightarrow{i_*^t} & H_c^{n-k}(U \cap V)^* & \xrightarrow{\delta^t} & H_c^{n-k-1}(U \cup V)^*
 \end{array} \quad (4.18)$$

Demostración. Las filas son exactas por el Teorema 4.23 (los cambios de signo en los morfismos conectores δ no afectan la exactitud de la sucesión) y el Escolio 4.33: la transpuesta de una sucesión exacta de espacios vectoriales es exacta.

Para ver la conmutatividad del primer cuadrado, tómese $\omega \in Z_{\text{dR}}^k(U \cup V)$, $\alpha \in Z_c^{n-k}(U)$ y $\beta \in Z_c^{n-k}(V)$. Entonces

$$\begin{aligned}
 q_*^t \Pi_{U \cup V}[\omega]([\alpha], [\beta]) &= \Pi_{U \cup V}[\omega] q_*([\alpha], [\beta]) = \Pi_{U \cup V}[\omega](j_{1*}\alpha + j_{2*}\beta) \\
 &= \int_{U \cup V} \omega \wedge j_{1*}\alpha + \omega \wedge j_{2*}\beta = \int_U j_1^* \omega \wedge \alpha + \int_V j_2^* \omega \wedge \beta \\
 &= (\Pi_U, \Pi_V)[j(\omega)]([\alpha], [\beta])
 \end{aligned}$$

usando la relación $j(\omega) := (j_1^* \omega, j_2^* \omega)$ de (4.11). Luego $q_*^t \Pi_{U \cup V}[\omega] = (\Pi_U, \Pi_V)(j^*[\omega])$ para todo $[\omega] \in H_{\text{dR}}^k(U \cup V)$, es decir, el primer cuadrado conmuta.

En cuanto al segundo cuadrado, tómese $\alpha \in Z_{\text{dR}}^k(U)$, $\beta \in Z_{\text{dR}}^k(V)$ y $\eta \in Z_c^{n-k}(U \cap V)$. Entonces

$$\begin{aligned}
 i_*^t (\Pi_U[\alpha], \Pi_V[\beta]) [\eta] &= (\Pi_U[\alpha], \Pi_V[\beta]) [i(\eta)] = \Pi_U[\alpha](i_{1*}\eta) - \Pi_V[\beta](i_{2*}\eta) \\
 &= \int_U \alpha \wedge i_{1*}\eta - \int_V \beta \wedge i_{2*}\eta = \int_{U \cap V} i_1^* \alpha \wedge \eta - i_2^* \beta \wedge \eta \\
 &= \int_{U \cap V} p(\alpha, \beta) \wedge \eta = \Pi_{U \cap V} p^*([\alpha], [\beta]) [\eta].
 \end{aligned}$$

Esto establece la conmutatividad del segundo cuadrado.

El tercer cuadrado también es conmutativo. En efecto, sean $[\omega] \in H_{\text{dR}}^k(U \cap V)$ y $[\eta] \in H_c^{n-k-1}(U \cup V)$. Entonces $\delta[\omega] := [\xi]$ donde $\xi \in Z_{\text{dR}}^{k+1}(U \cup V)$ tiene restricciones $d(h_2\omega)$ a U y $-d(h_1\omega)$ a V , para alguna partición de la unidad $\{h_1, h_2\}$ subordinada a $\{U, V\}$. Fíjese que $d(h_2\omega) = dh_2 \wedge \omega$ y $d(h_1\omega) = dh_1 \wedge \omega$ porque $d\omega = 0$. Además, $h_1 = 0$ y $h_2 = 1$ en $V \setminus U$; $h_2 = 0$ y $h_1 = 1$ en $U \setminus V$; así que $\text{sop } \xi \subset U \cap V$.

Por otro lado, por el Escolio 4.33, $\delta[\eta] = [d\eta_1] = -[d\eta_2]$ donde $\eta_1 := j_{1*}(h_1\eta)$, $\eta_2 := j_{2*}(h_2\eta)$, usando la misma partición de la unidad. Entonces

$$\begin{aligned}\Pi_{U \cup V} \delta[\omega][\eta] &= \int_{U \cup V} \xi \wedge \eta = \int_{U \cap V} \xi \wedge \eta \quad (\text{porque } \text{sop } \xi \subset U \cap V) \\ &= \int_{U \cap V} dh_2 \wedge \omega \wedge \eta = (-1)^k \int_{U \cap V} \omega \wedge dh_2 \wedge \eta = (-1)^k \int_{U \cap V} \omega \wedge d(h_2\eta) \\ &= (-1)^k \int_{U \cap V} \omega \wedge d\eta_2 = (-1)^{k+1} \Pi_{U \cap V}[\omega](\delta[\eta]) = (-1)^{k+1} \delta^t \Pi_{U \cap V}[\omega][\eta].\end{aligned}$$

En consecuencia, $\Pi_{U \cup V} \circ (-1)^{k+1} \delta = \delta^t \circ \Pi_{U \cap V}$ sobre $H_{\text{dR}}^k(U \cap V)$. \square

Teorema 4.39 (Dualidad de Poincaré). *Sea M una variedad orientable n -dimensional con un buen cubrimiento finito. Las aplicaciones \mathbb{R} -lineales $\Pi_M : H_{\text{dR}}^k(M) \rightarrow H_c^{n-k}(M)^*$ dadas por (4.17) son isomorfismos, para $k = 0, 1, \dots, n$.*

Demostración. Se procede por inducción sobre la cardinalidad m de un buen cubrimiento de M . En el caso $m = 1$, M es difeomorfo a \mathbb{R}^n por definición (en particular, M es conexo). Entonces $H_c^n(M) \simeq \mathbb{R}$; este isomorfismo lineal puede tomarse como $[\omega] \mapsto \int_M \omega$, para $\omega \in Z_c^n(M)$. Por otro lado, $H_{\text{dR}}^0(M) \simeq \mathbb{R}$ al tomar el valor $[c] \in \mathbb{R}$ de una función constante $c \in Z^0(M)$. Al notar que $\Pi_M[\omega][c] := \int_M c \omega = c \int_M \omega$, se obtiene $H_{\text{dR}}^0(M) \simeq H_c^n(M)^*$ mediante Π_M . Los otros casos $k = 1, \dots, n-1$ son triviales porque $H_{\text{dR}}^k(M) \simeq 0 \simeq H_c^{n-k}(M)^*$.

Cuando $m > 1$, supóngase (por inducción) que el teorema es válido para variedades con buenos cubrimientos de cardinalidad menor. Si $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_m\}$ cubre M bien, sea $U := U_m$ y $V := U_1 \cup \dots \cup U_{m-1}$. Entonces, en el diagrama (4.18), Π_U , Π_V y $\Pi_{U \cap V}$ son isomorfismos lineales. Ese diagrama se extiende horizontalmente a un diagrama cuya primera fila es (salvo algunos signos) la sucesión larga de Mayer y Vietoris en cohomología de de Rham; la segunda fila es la transpuesta de la sucesión larga de Mayer y Vietoris en cohomología con soportes compactos; y todas las flechas verticales son aplicaciones de Poincaré.

La Proposición 4.38 y el lema de cinco (Lema 1.19) muestran que $\Pi_{U \cup V} = \Pi_M$ es un isomorfismo. \square

Corolario 4.40. *Si M es una variedad orientable n -dimensional compacta, hay isomorfismos $H_{\text{dR}}^k(M) \simeq H_c^{n-k}(M)^*$ para $k = 0, 1, \dots, n$.*

*En particular, si los $b_k := \dim_{\mathbb{R}} H_{\text{dR}}^k(M)$ son los **números de Betti** de M , entonces $b_k = b_{n-k}$ para $k = 0, 1, \dots, \lfloor n/2 \rfloor$.* \square

Ejemplo 4.41. El **toro** $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ es compacto, orientable y bidimensional. Es fácil ver que $\mathbb{T}^2 = U \cup V$ donde hay difeomorfismos $U \approx V \approx \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ y $U \cap V \approx (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}) \uplus (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R})$. \llbracket Esto fue el ejemplo original de Mayer. \rrbracket Luego $b_0(\mathbb{T}^2) = 1$, $b_1(\mathbb{T}^2) = 2$, $b_2(\mathbb{T}^2) = 1$. \diamond

4.3 Complejos de Koszul

En esta sección, R denotará un anillo *conmutativo*.

Una de las raíces históricas del álgebra homológica es el trabajo de Hilbert, publicado en 1890, sobre sistemas de ecuaciones polinomiales y sus invariantes.¹⁹ Sea $R = \mathbb{F}[t_1, \dots, t_n]$ el anillo de polinomios sobre el cuerpo \mathbb{F} con n indeterminados. El *teorema de la base* de Hilbert (demostrado en ese artículo, de modo no constructivo) dice que cualquier ideal $I \subset R$, o más generalmente cualquier R -submódulo $A \subseteq R^j$, tiene una cantidad finita de generadores $h_1, \dots, h_m \in A$.

Por lo general, este R -módulo A no es libre: entre sus generadores existen *relaciones lineales* de la forma $g_1 h_1 + \dots + g_m h_m = 0$ con $g_1, \dots, g_m \in R$. Tales vectores (g_1, \dots, g_m) generan a su vez un R -módulo $S_1(A)$; Hilbert llamó **sicigias** a estas relaciones lineales.²⁰ Si $\varphi: R^m \rightarrow A: e_i \mapsto h_i$, entonces $S_1(A) = \ker \varphi$. Esto da lugar a una sucesión exacta corta $0 \rightarrow S_1(A) \rightarrow F_0 \xrightarrow{\varphi} A \rightarrow 0$ donde $F_0 = R^m$ es un R -módulo libre. El R -módulo $S_1(A)$ también es finitamente generado y se puede iterar el proceso para obtener otros R -módulos de sicigias, $S_j(A) := S_1(S_{j-1}(A))$. El *teorema de las sicigias* de Hilbert (en el mismo artículo) establece que con n iteraciones a lo sumo, se llega a un R -módulo *libre* $S_k(A) =: F_k$. Por ser libre, no hay relaciones no triviales entre los generadores de F_k , así que $S_{k+1}(A) = 0$. En términos modernos: cada R -módulo finitamente generado A admite una *resolución libre finita*, con “longitud” $k \leq n$:

$$0 \rightarrow F_k \rightarrow \dots \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \xrightarrow{\varphi} A \rightarrow 0.$$

Hay en día, hay muchas generalizaciones de esas ideas que constituyen buena parte del área de “álgebra conmutativa”. Para describir tales resoluciones libres (o proyectivas) finitas, se usan los *complejos de Koszul* (introducidos por Koszul en su tesis doctoral para calcular la cohomología de las álgebras de Lie).

Definición 4.42. Sea A un R -módulo. Si $x \in R$, la función $a \mapsto xa$ es un R -endomorfismo de A (porque R es conmutativo). Dícese que x es un **divisor de cero** para A si este endomorfismo no es inyectivo (esto es, si hay $b \neq 0$ en A con $xb = 0$).

Denótese por $K(x)$, para $x \in R$, el complejo de cocadenas $0 \rightarrow R \xrightarrow{x} R \rightarrow 0$; aquí el R -homomorfismo x es una abreviatura para la multiplicación $z \mapsto xz$. La cohomología de este complejo, en grado 0, es el *aniquilador* de x :

$$H^0(K(x)) = \text{ann}(x) \equiv \{z \in R : xz = 0\},$$

y $H^1(K(x)) = R/\text{ann}(x)$. Por lo tanto, la cohomología de $K(x)$ es trivial si y solo si x no es un divisor de cero en R . ◇

¹⁹David Hilbert, “Über die Theorie der algebraischen Formen”, *Mathematische Annalen* **36** (1890), 473–530.

²⁰La palabra *sicigia* (del griego $\sigma\upsilon\zeta\acute{\upsilon}\gamma\iota\alpha$ = unión por yugo) es un término astronómico que significa una *conjunción*: tres o más cuerpos celestes alineados. Su uso en contextos matemáticos se debe a Sylvester (1850).

En álgebra conmutativa, hay mucho interés en encontrar, dentro de un anillo R dado, juegos de dos o más elementos que generalizan el concepto de *no dividir cero*. Sea $\langle x_1, \dots, x_n \rangle \subseteq R$ el ideal generado por unos elementos $x_1, \dots, x_n \in R$ (dados en orden). Estos elementos forman una **sucesión regular** en R si $\langle x_1, \dots, x_n \rangle \neq R$ y si además cada x_k es un no divisor de cero para el R -módulo cociente $R/\langle x_1, \dots, x_{k-1} \rangle$.

El ejemplo motivante es el caso $R = \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$, donde los monomios x_1, \dots, x_n forman una sucesión regular. Se puede definir un complejo finito $K(x_1, \dots, x_n)$ cuya cohomología no es difícil de calcular y que resulta ser acíclico para sucesiones regulares.

Ejemplo 4.43. Supóngase que $x \in R$ no es un divisor de cero. Si $y \in R$, entonces $z \mapsto yz$ induce un morfismo de complejos entre dos copias de $R(x)$:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & R & \xrightarrow{x} & R & \longrightarrow & 0 \\ & & y \downarrow & & \downarrow y & & \\ 0 & \longrightarrow & R & \xrightarrow{x} & R & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

(El diagrama conmuta porque $yx = xy$.) Al reemplazar la primera fila por el complejo trasladado $K(x)[-1] : 0 \longrightarrow R \xrightarrow{-x} R \longrightarrow 0 \longrightarrow 0$ y al combinar las dos filas en una, se obtiene un nuevo complejo finito:

$$\underline{K(x, y)} : \quad 0 \longrightarrow R \xrightarrow{(y, -x)} R \oplus R \xrightarrow{(x, y)^t} R \longrightarrow 0, \quad (4.19)$$

con R -homomorfismos $f \equiv (y, -x) : R \rightarrow R \oplus R : z \mapsto (yz, -xz)$ y $g \equiv (x, y)^t : R \oplus R \rightarrow R : (z, t) \mapsto xz + yt$.

Ahora $H^0(K(x, y)) = \ker f = \text{ann}(x, y)$, el aniquilador del ideal $\langle x, y \rangle \subset R$.

Para $(z, t) \in \ker g$, vale $-yt = xz \in xR$. Entonces

$$(z, t) \in \ker g \implies t \in \underline{\langle x : y \rangle} \equiv \{ u \in R : yu \in xR \},$$

el *ideal cociente*²¹ de xR entre yR . Como x no divide cero en R , la ecuación $xz = -yt$ tiene solución única z , así que $(z, t) \leftrightarrow t$ es un isomorfismo $\ker g \simeq \underline{\langle x : y \rangle}$. Por otro lado, la correspondencia $(yz, -xz) \leftrightarrow xz : \text{im } f \rightarrow xR$ es un isomorfismo. En resumen:

$$H^1(K(x, y)) \simeq \underline{\langle x : y \rangle} / xR \quad \text{cuando} \quad H^0(K(x)) = 0.$$

[[El anillo polinomial $R = \mathbb{F}[x, y]$ es entero; no tiene divisores de cero. En este caso $\underline{\langle x : y \rangle} = xR$, así que $H^1(K(x, y)) = 0$.]] \diamond

²¹Si I, J son dos ideales de un anillo conmutativo R , su **ideal cociente** es $\langle I : J \rangle \equiv \{ r \in R : rJ \subseteq I \}$. Para ideales principales $I = xR, J = yR$, se escribe $\langle x : y \rangle$ simplemente, siguiendo el consejo de William de Ockham.

Para definir $K(x_1, \dots, x_n)$ en general, Koszul notó que la graduación del álgebra exterior de un R -módulo libre (Definición 4.15) determina un complejo finito. Por ejemplo, se puede escribir el complejo (4.19) en la forma

$$0 \longrightarrow \Lambda^0 R^2 \xrightarrow{f} \Lambda^1 R^2 \xrightarrow{g} \Lambda^2 R^2 \longrightarrow 0,$$

donde $(x, y) \in R^2 = R \oplus R$, un R -módulo libre, con homomorfismos apropiados f, g .

Definición 4.44. Sea $A \simeq R^n$ un R -módulo libre de rango finito, con $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in A$ ($\mathbf{x} \neq 0$). El **complejo de Koszul cohomológico** $K(\mathbf{x})$ es la sucesión finita

$$K(\mathbf{x}) : 0 \longrightarrow R \xrightarrow{\mathbf{x}} A \xrightarrow{d_{\mathbf{x}}} \Lambda^2 A \longrightarrow \dots \longrightarrow \Lambda^{n-1} A \xrightarrow{d_{\mathbf{x}}} \Lambda^n A \longrightarrow 0. \quad (4.20)$$

Sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base de A , así que $\mathbf{x} = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \in A$. Cada $\Lambda^k A$ es un R -módulo libre con base $\{e_I = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} : |I| = k\}$. Los R -homomorfismos se definen por

$$d_{\mathbf{x}} : \Lambda^k A \rightarrow \Lambda^{k+1} A : \mathbf{a} \mapsto \mathbf{x} \wedge \mathbf{a} = \sum_{j=1}^n x_j e_j \wedge \mathbf{a}.$$

Para $k = 0$, esto es $\mathbf{x} : R \rightarrow A : r \mapsto r\mathbf{x}$. Como $\mathbf{x} \wedge \mathbf{x} = 0$ en $\Lambda^2 A$, se ve que $d_{\mathbf{x}}^2 = 0$, así que (4.20) es un complejo de cocadenas. \diamond

Obsérvese que

$$d_{\mathbf{x}}(e_I) = \mathbf{x} \wedge e_I = \sum_{j \notin I} x_j e_j \wedge e_I = \sum_{j \notin I} (-1)^{r_j} x_j e_{I \cup \{j\}}$$

donde el signo $(-1)^{r_j}$ está dado por el número $r = r_j$ de factores del producto cuña $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$ anteriores a e_j , al ser $i_r < j < i_{r+1}$.

En general, el complejo $R \xrightarrow{\mathbf{x}} \Lambda^\bullet A$ de (4.20) no es una resolución de R , porque este complejo no siempre es exacto. Para examinar este aspecto del complejo de Koszul, conviene considerar la situación dual, al reemplazar A por su R -módulo dual $A^* = \text{Hom}_R(A, R)$ y cambiar $\mathbf{x} \in A$ por $\varphi \in A^*$, o sea, un R -homomorfismo $\varphi : A \rightarrow R$.

Definición 4.45. Sea $A \simeq R^n$ y $\varphi : A \rightarrow R$ un R -homomorfismo. El **complejo de Koszul homológico** $K'(\varphi)$ es la sucesión finita

$$K'(\varphi) : 0 \longrightarrow \Lambda^n A \xrightarrow{\partial_\varphi} \Lambda^{n-1} A \longrightarrow \dots \longrightarrow \Lambda^2 A \xrightarrow{\partial_\varphi} \Lambda A \xrightarrow{\varphi} R \longrightarrow 0, \quad (4.21)$$

donde los R -homomorfismos ∂_φ son las *contracciones* $\partial_\varphi : \Lambda^k A \rightarrow \Lambda^{k-1} A$, dadas por su acción sobre una base de $\Lambda^k A$:

$$\partial_\varphi(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}) := \sum_{r=1}^k (-1)^{r-1} \varphi(e_{i_r}) e_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{e_{i_r}} \wedge \dots \wedge e_{i_k}. \quad (4.22)$$

Para $k = 1$, esto es $\varphi: A \rightarrow R$ simplemente. Es fácil comprobar que $\partial_\varphi^2 = 0$, así que (4.21) es un complejo de cadenas.²² \diamond

Escolio 4.46. El R -homomorfismo $\partial_\varphi: \Lambda^\bullet A \rightarrow \Lambda^\bullet A$ determinado por (4.22) es una derivación impar (de grado -1) del álgebra exterior $\Lambda^\bullet A$:

$$\partial_\varphi(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \partial_\varphi(\mathbf{a}) \wedge \mathbf{b} + (-1)^{\#a} \mathbf{a} \wedge \partial_\varphi(\mathbf{b}). \quad \boxminus$$

Los dos complejos de Koszul (4.20) y (4.21) están relacionados por dualidad. Nótese que $\Lambda^0 A = R$ y $\Lambda^1 A = A$ por definición: ambos complejos presentan la graduación del álgebra graduada $\Lambda^\bullet A$ de manera complementaria. En los dos casos, R aparece en la posición 0 del complejo (se debe recordar el convenio $C^k = C_{-k}$, que dice que homología es cohomología con índices negativos, y viceversa). Además, la diferencial de cada complejo es una homotopía para el otro, como evidencia el siguiente resultado.

Lema 4.47. Sea $A \simeq R^n$ un R -módulo libre de rango n . Si $r \in R$, denótese por r_\bullet el operador de multiplicación por r en el R -módulo $\Lambda^\bullet A$. Si $\mathbf{x} \in A$ y $\varphi \in A^*$, se verifica la fórmula siguiente:

$$d_{\mathbf{x}} \circ \partial_\varphi + \partial_\varphi \circ d_{\mathbf{x}} = \varphi(\mathbf{x})_\bullet. \quad (4.23)$$

y en consecuencia, ∂_φ es una homotopía de cocadenas sobre $K(\mathbf{x})$ entre $\varphi(\mathbf{x})_\bullet$ y 0. Dualmente, $d_{\mathbf{x}}$ es una homotopía de cadenas sobre $K'(\varphi)$ entre $\varphi(\mathbf{x})_\bullet$ y 0.

Demostración. En primer lugar, nótese que los operadores ∂_φ y $d_{\mathbf{x}}$ tienen grados respectivos (-1) y $(+1)$ sobre el álgebra graduada $\Lambda^\bullet A$, como es apropiado para homotopías de cocadenas o cadenas, respectivamente. La combinación $d_{\mathbf{x}} \circ \partial_\varphi + \partial_\varphi \circ d_{\mathbf{x}}$ es un operador de grado 0.

Si $\mathbf{a} \in \Lambda^\bullet A$, el Escolio 4.46 muestra que

$$\begin{aligned} d_{\mathbf{x}}(\partial_\varphi(\mathbf{a})) + \partial_\varphi(d_{\mathbf{x}}(\mathbf{a})) &= \mathbf{x} \wedge \partial_\varphi(\mathbf{a}) + \partial_\varphi(\mathbf{x} \wedge \mathbf{a}) \\ &= \mathbf{x} \wedge \partial_\varphi(\mathbf{a}) + \partial_\varphi(\mathbf{x}) \mathbf{a} - \mathbf{x} \wedge \partial_\varphi(\mathbf{a}) \\ &= \varphi(\mathbf{x}) \mathbf{a}, \end{aligned}$$

porque $\mathbf{x} \in A = \Lambda^1 A$ conlleva $\partial_\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) \in R$. \square

En particular, si $\varphi(\mathbf{x})$ no es un divisor de cero en R , el operador $\varphi(\mathbf{x})_\bullet$ es un automorfismo de $\Lambda^\bullet A$, así que los complejos $K(\mathbf{x})$ y $K'(\varphi)$ son contractibles y sus grupos de co/homología son todos 0, por el Lema 1.35. En otras palabras, tanto $K(\mathbf{x})$ como $K'(\varphi)$ son soluciones exactas en la categoría $R\text{-Mod}$. Si se aumenta el complejo $K'(\varphi)$ por el epimorfismo $R \rightarrow \text{coker } \varphi = R/\varphi(A)$, se obtiene una **resolución de Koszul** (libre y finita) $K'(\varphi) \twoheadrightarrow R/\varphi(A)$.

²²La notación y la terminología sobre complejos de Koszul no han sido unificadas. Aquí se sigue la presentación del capítulo 17 del libro: David Eisenbud, *Commutative Algebra with a View to Algebraic Geometry*, Springer, New York, 1995. (El Ejemplo 4.43 fue tomado de ese libro.)

► Algunos autores definen el complejo de Koszul homológico de modo levemente diferente de la Definición 4.45. Dados elementos $y_1, \dots, y_n \in R$ – esto es, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in R^n$ – las asignaciones $e_i \mapsto y_i$ determinan un R -homomorfismo $\varphi: R^n \rightarrow R$. Defínase un complejo $K'(\mathbf{y})$ por (4.21), con diferenciales $\partial_{\mathbf{y}}$ dados por (4.22), al cambiar $\varphi(e_{i_r}) \mapsto y_{i_r}$ al lado derecho de esa fórmula. En la fórmula de homotopía (4.23), se obtiene $d_x \circ \partial_{\mathbf{y}} + \partial_{\mathbf{y}} \circ d_x$ igual al operador de multiplicación por $\sum_{i=1}^n x_i y_i$ sobre $\Lambda^\bullet R^n$.

Con esa notación, $\varphi(R^n) = \langle y_1, \dots, y_n \rangle$ es el ideal de R generado por los elementos y_i . La resolución de Koszul correspondiente es $K'(\mathbf{y}) \twoheadrightarrow R/\langle y_1, \dots, y_n \rangle$.

En álgebra conmutativa, la siguiente construcción resulta muy útil. Si B es un R -módulo cualquiera, se define el *complejo de Koszul de B* como $K(\mathbf{y}; B) := K'(\mathbf{y}) \otimes_R B$. Los métodos del Capítulo 3 pueden emplearse para analizar el efecto de las operaciones $b \mapsto y_i b$ sobre B . Consúltese los libros de Jacobson (sección 6.13), Lang (sección 21.4) o Weibel (sección 4.5) para más información al respecto.

Ejemplo 4.48. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita n sobre un cuerpo \mathbb{F} . Se define el **álgebra simétrica** de V al imitar la Definición 4.15 del álgebra exterior con un producto conmutativo (y asociativo):

$$v_1 \vee \dots \vee v_k := \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} v_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma(k)}.$$

Esta es una \mathbb{F} -álgebra graduada conmutativa, $\underline{S^\bullet V} := \bigoplus_{k=0}^{\infty} S^k V$, donde $\dim S^k V = \binom{n+k-1}{k}$.

El producto tensorial $\Lambda^\bullet V^* \otimes S^\bullet V$ es un \mathbb{F} -álgebra graduada (superconmutativa)²³ con producto $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{x})(\mathbf{b} \otimes \mathbf{y}) := (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \otimes (\mathbf{x} \vee \mathbf{y})$.

Hay un isomorfismo (natural!) $\theta: V^* \otimes V \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, V)$ tal que $\theta(f \otimes v)$ es el operador $w \mapsto f(w)v$. Sea $t := \theta^{-1}(1_V) \in V^* \otimes V = \Lambda^1 V^* \otimes S^1 V$. En términos de bases duales $\{v_i\}$ de V y $\{f^i\}$ de V^* , se obtiene $t = \sum_{i=1}^n f^i \otimes v_i$. En el álgebra $\Lambda^\bullet V^* \otimes S^\bullet V$, entonces, se ve que

$$t^2 = \sum_{i,j=1}^n (f^i \wedge f^j) \otimes (v_i \vee v_j) = \sum_{i < j} (f^i \wedge f^j) \otimes (v_i \vee v_j - v_j \vee v_i) = 0.$$

Entonces el operador de multiplicación por t define un complejo de módulos sobre $S = S^\bullet(V)$:

$$K: 0 \longrightarrow S^\bullet V \xrightarrow{t} V^* \otimes S^\bullet V \xrightarrow{t} \Lambda^2 V^* \otimes S^\bullet V \longrightarrow \dots \longrightarrow \Lambda^n V^* \otimes S^\bullet V \longrightarrow 0.$$

Este es el **complejo de Koszul tautológico** de S -módulos determinado por V . Nótese que K es naturalmente isomorfo al complejo de Koszul $K(t)$, al considerar t como elemento del S -módulo $V^* \otimes S^\bullet V$.

²³El producto tensorial sobre \mathbb{F} se escribe con \otimes en vez de $\otimes_{\mathbb{F}}$. El producto tensorial de dos superálgebras A y B debe tener en general una graduación par/impar, por la regla de signos de Koszul: $(a \otimes b)(a' \otimes b') := (-1)^{\#a' \#b} aa' \otimes bb'$. Sin embargo, en el caso presente todo elemento de $S^\bullet V$ es par, el producto en $\Lambda^\bullet V^* \otimes S^\bullet V$ no requiere el signo, y la graduación se hereda de la de $\Lambda^\bullet V^*$.

En el complejo dual, se reemplaza t por la operación $V \otimes S^\bullet V \rightarrow S^\bullet V : v \otimes x \mapsto v \vee x$, cuyo conúcleo es isomorfo a $S^0 V = \mathbb{F}$ (como S -módulo). Así se obtiene una resolución libre finita de S -módulos: $\Lambda^\bullet V \otimes S^\bullet V \twoheadrightarrow \mathbb{F}$. \diamond

4.4 Cohomología de grupos

En 1942, Heinz Hopf observó que para cierta clase de espacios topológicos X llamados *asféricos*, la homología simplicial de X está determinada esencialmente por el grupo fundamental $\pi_1(X, x_0)$; pero la relación precisa era difícil de identificar. La búsqueda de esa relación lo llevó a considerar una especie de cohomología para el grupo mismo, mediante ciertas resoluciones proyectivas. El asunto fue simplificado por Eilenberg y MacLane usando homología singular, hasta convertirse en un esquema cohomológico para grupos en general, sin referencia a sus orígenes topológicos.²⁴

Esa teoría cohomológica de grupos iluminó dos problemas preexistentes en la teoría de grupos: la clasificación de los llamados *homomorfismos cruzados* de grupos, y la clasificación de las extensiones centrales de un grupo dado.

Definición 4.49. Sea G un grupo fijo. Un grupo abeliano A es un **G -módulo** (izquierdo) si hay una acción aditiva de G sobre A , dada por una aplicación $G \times A \rightarrow A : (g, a) \mapsto g \cdot a$ que satisface

$$g \cdot (a + b) = g \cdot a + g \cdot b, \quad g \cdot (h \cdot a) = (gh) \cdot a, \quad 1 \cdot a = a, \quad (4.24)$$

para todo $g, h \in G$ y $a, b \in A$. Esta se extiende a una acción del anillo grupal $\mathbb{Z}G$ sobre A , por $(\sum_{g \in G} m_g g) a := \sum_{g \in G} m_g (g \cdot a)$; entonces A es una $\mathbb{Z}G$ -módulo izquierdo.

La acción se llama *trivial* si $g \cdot a = a$ para todo $g \in G, a \in A$.

La categoría $G\text{-Mod}$ de G -módulos (izquierdos) es entonces sinónima con la categoría $\mathbb{Z}G\text{-Mod}$; se escribe $\text{Hom}_G(A, B)$ en vez de $\text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(A, B)$, para aliviar la notación. \diamond

Definición 4.50. Si A es un G -módulo, una **derivación** o *homomorfismo cruzado* de G en A es una función $\phi : G \rightarrow A$ que cumple

$$\phi(gh) = g \cdot \phi(h) + \phi(g), \quad \text{para todo } g, h \in G. \quad (4.25)$$

Nótese que $\phi(1) = 0$. Si A es un G -módulo trivial, entonces $\phi(gh) = \phi(h) + \phi(g)$; es decir, ϕ es un homomorfismo del grupo multiplicativo G en el grupo aditivo A . La totalidad de derivaciones de G en A es un grupo abeliano $\text{Der}(G, A)$.

Ese ϕ se extiende a una aplicación aditiva $\phi : \mathbb{Z}G \rightarrow A$ tal que $\phi(rs) = r \phi(s) + \phi(r)$ para $r, s \in \mathbb{Z}G$. Más generalmente, si A es un R -módulo izquierdo, una función aditiva $\phi : R \rightarrow A$ que cumple esta relación es una *derivación* de R en A .

²⁴Para esas raíces históricas, véase el libro de Dieudonné, pp. 453–463.

De hecho, si A es un R - R -bimódulo, una aplicación aditiva $\phi: R \rightarrow A$ se llama *derivación* si cumple la **regla de Leibniz**: $\phi(rs) = r\phi(s) + \phi(r)s$ para $r, s \in R$. Esto se reduce al caso anterior cuando la acción a derecha de R es trivial. Entonces la fórmula (4.25) debe entenderse como una regla de Leibniz que es trivial a la derecha.

Si $a \in A$, sea $\phi_a(g) := g \cdot a - a$. Como $gh \cdot a - a = g \cdot (h \cdot a - a) + (g \cdot a - a)$, este ϕ_a es una **derivación interna** o *derivación principal*. La totalidad $\text{Ider}(G, A)$ de las derivaciones internas es un subgrupo de $\text{Der}(G, A)$. \diamond

El grupo cociente $\text{Der}(G, A)/\text{Ider}(G, A)$ sirve para clasificar las derivaciones “no triviales” de G en A . En breve se verá que este cociente es un grupo de cohomología $H^1(G, A)$. Antes de hacer esa identificación, es oportuno abordar un segundo problema: ¿cómo clasificar las extensiones de G por un grupo abeliano?

Definición 4.51. Sea G un grupo cualquiera [con producto $(g, h) \mapsto gh$] y A un grupo abeliano [con suma $(a, b) \mapsto a + b$]. Una **extensión** de G por A es una sucesión exacta corta de grupos:

$$\underline{E}: \quad 0 \longrightarrow A \xrightarrow{j} E \xrightarrow{p} G \longrightarrow 1. \quad (4.26)$$

Este es una extensión del tipo (3.14) pero ahora en la categoría Grp de grupos no necesariamente abelianos.²⁵ La equivalencia de extensiones sigue la Definición 3.28. La extensión se considera *trivial* si la SEC (4.26) escinde. \diamond

Resulta que cada extensión (4.26) conlleva una acción de G sobre A . Para cada $g \in G$, elíjase un elemento $s(g) \in E$ tal que $s(1) = 1$ y $p(s(g)) = g$; esta *sección* del epimorfismo p no tiene que ser un homomorfismo. Si $g, h \in G$, entonces $s(g)s(h)s(gh)^{-1} \in \ker p = \text{im } j$, así que hay un elemento $\psi(g, h) \in A$ determinado por

$$j(\psi(g, h)) := s(g)s(h)s(gh)^{-1}.$$

Esta función $\psi: G \times G \rightarrow A$ es el **sistema de factores**²⁶ determinado por \underline{E} y la sección s .

Fíjese que $j(A) \trianglelefteq E$ porque $j(A) = \ker p$. Si $a \in A$, $g \in G$, entonces $s(g)j(a)s(g)^{-1} = j(b)$ para algún $b \in A$. Escribáse $\underline{g \cdot a} := b$. Entonces A es un G -módulo bajo esta acción de G .

Si $s': G \rightarrow E$ es otra sección de p , entonces $s'(g)s(g)^{-1} \in \ker p$ para todo $g \in G$, así que $s'(g) = j(b)s(g)$ para algún $b \in A$. Además, si $a \in A$, entonces

$$s'(g)j(a)s'(g)^{-1} = j(b)(s(g)j(a)s(g)^{-1})j(b)^{-1} = s(g)j(a)s(g)^{-1}$$

porque $j(A)$ es un grupo abeliano. En consecuencia, la acción $(g, a) \mapsto g \cdot a$ depende solo de \underline{E} pero no de s .

²⁵Aquí se emplea una notación híbrida: los grupos 0 y A son aditivos, mientras los grupos E , G y 1 son multiplicativos. Esta notación aparece en el libro *Homology* de MacLane; otros autores, como Jacobson, prefieren una versión puramente multiplicativa, con SECs de la forma $1 \longrightarrow A \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow 1$.

²⁶La terminología “sistema de factores” (o “conjunto de factores”) es un poco arcaica; se remonta a los trabajos de Schreier (1926) que dieron origen al concepto de extensión de grupo. De hecho, aparecen sin el nombre en las investigaciones de Schur (1904) sobre representaciones proyectivas de grupos.

La *asociatividad* del grupo E impone una condición sobre la función ψ . Si $g, h, k \in G$, entonces:

$$\begin{aligned} s(g)(s(h)s(k)) &= s(g)j(\psi(h, k))s(hk) = j(g \cdot \psi(h, k))s(g)s(hk) \\ &= j(g \cdot \psi(h, k))j(\psi(g, hk))s(ghk) \\ &= j(g \cdot \psi(h, k) + \psi(g, hk))s(ghk); \\ (s(g)s(h))s(k) &= j(\psi(g, h))s(gh)s(k) = j(\psi(g, h))j(\psi(gh, k))s(ghk) \\ &= j(\psi(g, h) + \psi(gh, k))s(ghk). \end{aligned}$$

En conclusión, un sistema de factores $\psi: G \times G \rightarrow A$ obedece:

$$\psi(g, h) + \psi(gh, k) = g \cdot \psi(h, k) + \psi(g, hk). \quad (4.27)$$

Además, la condición $s(1) = 1$ conlleva $\psi(g, 1) = \psi(1, h) = 0$ en A .

Escolio 4.52. Dada una extensión E y dos secciones $s, s': G \rightarrow E$ de $p: E \twoheadrightarrow G$, sean ψ y ψ' los respectivos sistemas de factores. Entonces hay una función $\phi: G \rightarrow A$ tal que²⁷

$$\psi'(g, h) = \psi(g, h) + g \cdot \phi(h) - \phi(gh) + \phi(g) \quad \text{para todo } g, h \in G. \quad \square$$

La importancia del sistema de factores ψ es que determina la ley de grupo en E (hasta un isomorfismo que define una equivalencia de extensiones). Cada elemento de E se escribe de forma única (pues $\ker p = \text{im } j$) como $(a, g) := j(a)s(g)$. Con esa notación, la ley de grupo es:

$$(a, g)(b, h) := (a + g \cdot b + \psi(g, h), gh). \quad (4.28)$$

La identidad es $(0, 1)$ y se ve que $(a, g)^{-1} = (-g^{-1} \cdot a - g^{-1} \cdot \psi(g, g^{-1}), g^{-1})$. Un cálculo directo muestra que la fórmula (4.28) define una multiplicación asociativa en E toda vez que la función ψ cumple (4.27).

► Después de estas preparaciones, es hora de introducir un complejo de cocadenas cuya cohomología clasifica las derivaciones y los sistemas de factores.

Definición 4.53. Sea G un grupo y A un G -módulo. Si $n \in \mathbb{N}$, una **n -cocadena** con valores en A es una función $\varphi: G^n \rightarrow A$ tal que $\varphi(g_1, \dots, g_n) = 0$ si algún $g_j = 1$. Tales n -cocadenas forman un grupo abeliano $C^n(G, A)$ bajo suma puntual de funciones; para $n = 0$, se toma $C^0(G, A) := A$.

²⁷Obsérvese que $\tilde{\phi}(g, h) := \phi(gh) - g \cdot \phi(h) - \phi(g)$ cumple (4.27). Este sistema de factores está asociado a un producto semidirecto $A \rtimes G$, cuya ley de grupo es $(a, g)(b, h) := (a + g \cdot b, gh)$.

La *diferencial* $\delta: C^n(G, A) \rightarrow C^{n+1}(G, A)$ se define por:

$$\begin{aligned} \delta\varphi(g_1, \dots, g_{n+1}) := & g_1 \cdot \varphi(g_2, \dots, g_{n+1}) + \sum_{j=1}^n (-1)^j \varphi(g_1, \dots, g_j g_{j+1}, \dots, g_{n+1}) \\ & + (-1)^{n+1} \varphi(g_1, \dots, g_n). \end{aligned} \quad (4.29)$$

En el caso $n = 0$, esto da $\delta a(g) := g \cdot a - a = \phi_a(g)$. \diamond

Un cálculo directo muestra que $\delta^2 = 0$ como aplicación de $C^n(G, A) \rightarrow C^{n+2}(G, A)$.

Para $n = 0$, un elemento $a \in A$ es un 0-cociclo si y solo si $g \cdot a = a$ para todo $g \in G$. Entonces $H^0(G, A) = Z^0(G, A)$ es el *subgrupo invariante* $A^G \leq A$:

$$H^0(G, A) = \underline{A}^G \equiv \{ a \in A : g \cdot a = a \text{ para todo } g \in G \}.$$

Los casos $n = 1$ y $n = 2$ también son de particular interés:

$$\begin{aligned} \delta\phi(g, h) &:= g \cdot \phi(h) - \phi(gh) + \phi(g), \\ \delta\psi(g, h, k) &:= g \cdot \psi(h, k) - \psi(gh, k) + \psi(g, hk) - \psi(g, h). \end{aligned}$$

De (4.25) se ve que *una derivación es un 1-cociclo*: $Z^1(G, A) = \text{Der}(G, A)$. Además, de (4.27) se ve que *un sistema de factores cumple $\delta\psi = 0$* , es decir, *ψ es un 2-cociclo*: $\psi \in Z^2(G, A)$.

Las derivaciones internas son las $\phi_a = \delta a \in B^1(G, A)$. Entonces las derivaciones “no triviales” son clasificados por el grupo abeliano cociente

$$\frac{\text{Der}(G, A)}{\text{Ider}(G, A)} = \frac{Z^1(G, A)}{B^1(G, A)} =: H^1(G, A).$$

El Escolio 4.52 y la fórmula (4.28) muestran que cada 2-cociclo ψ define una extensión \underline{E} a partir de un G -módulo A . Se obtiene una extensión equivalente al usar otro sistema de factores ψ' si este difiere de ψ por un 2-coborde: $\psi' = \psi + \delta\phi$. Luego las extensiones (4.26) de G por A están clasificados por el segundo grupo de cohomología:

$$Z^2(G, A)/B^2(G, A) =: H^2(G, A).$$

► Hay una definición alternativa de los grupos de cohomología que utiliza la tecnología del Capítulo 3. El punto de partida es el grupo abeliano \mathbb{Z} , considerado como G -módulo trivial ($g \cdot n = n$ para $n \in \mathbb{Z}$). Se quiere construir una resolución proyectiva de \mathbb{Z} por G -módulos (o lo que es lo mismo, por $\mathbb{Z}G$ -módulos):

$$\cdots \longrightarrow B_2 \xrightarrow{\partial} B_1 \xrightarrow{\partial} B_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}. \quad (4.30)$$

Al aplicar el funtor contravariante $\text{Hom}_G(-, A)$ al complejo B_\bullet , se obtiene un complejo de cocadenas:

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_G(B_0, A) \xrightarrow{\delta} \text{Hom}_G(B_1, A) \xrightarrow{\delta} \text{Hom}_G(B_2, A) \longrightarrow \cdots$$

cuya cohomología es la familia de grupos abelianos $\text{Ext}_G^n(\mathbb{Z}, A)$, para $n \in \mathbb{N}$.

El Corolario 3.14 al teorema de comparación muestra que estos grupos no dependen de la resolución específica empleada para calcularlos. La que más frecuentemente se usa es la llamada *resolución barra* (a continuación), así nombrado por la notación de sus generadores.

Definición 4.54. Sea B_n el $\mathbb{Z}G$ -módulo libre con generadores denotados por $[g_1|g_2|\cdots|g_n]$, con cada $g_j \in G \setminus \{1\}$; sea $B_0 := \mathbb{Z}G$ también.²⁸ (Para simplificar los cálculos, se define $[g_1|\cdots|g_n] := 0$ si algún $g_j = 1$.) Este B_n coincide con el \mathbb{Z} -módulo libre generado por símbolos $g_0[g_1|\cdots|g_n]$ con $g_j \neq 1$ para $j \geq 1$; la acción de G es por multiplicación a la izquierda.

La diferencial $\partial: B_n \rightarrow B_{n-1}$ es el $\mathbb{Z}G$ -homomorfismo determinado por:

$$\partial([g_1|\cdots|g_n]) := g_1[g_2|\cdots|g_n] + \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j [g_1|\cdots|g_j g_{j+1}|\cdots|g_n] + (-1)^n [g_1|\cdots|g_{n-1}].$$

Explícitamente, para $n = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} \partial([g]) &= g - 1 \in \mathbb{Z}G, \\ \partial([g|h]) &= g[h] - [gh] + [g], \\ \partial([g|h|k]) &= g[h|k] - [gh|k] + [g|hk] - [g|h]. \end{aligned}$$

Defínase también el G -epimorfismo $\varepsilon: B_0 \rightarrow \mathbb{Z}$ por

$$\varepsilon\left(\sum_{g \in G} m_g g\right) := \sum_{g \in G} m_g \quad (\text{es decir, } \varepsilon(g) := 1 \text{ para todo } g \in G).$$

Un cálculo directo muestra que $\partial^2 = 0: B_n \rightarrow B_{n-2}$ para $n \geq 2$; y $\varepsilon \circ \partial = 0: B_1 \rightarrow \mathbb{Z}$ porque cada $\varepsilon(g - 1) = 1 - 1 = 0$. El lema siguiente comprueba que (4.30) es una sucesión exacta: esta es la **resolución barra** de \mathbb{Z} como G -módulo. \diamond

Lema 4.55. *El complejo (4.30) es contractible mediante la siguiente homotopía de cadenas de \mathbb{Z} -módulos:*

$$s_n(g_0[g_1|\cdots|g_n]) := [g_0|g_1|\cdots|g_n] \quad \text{para } n \geq 1; \quad s_0(g_0) := [g_0]; \quad s_{-1}(1) := 1.$$

En consecuencia, la sucesión de G -módulos (4.30) es exacta.

²⁸Este B_0 es un $\mathbb{Z}G$ -módulo libre generado por 1, la identidad de G . Algunos autores escriben $[]$ para denotar este generador, sacrificando su sentido estético en favor de consistencia de notación.

Demostración. Denótese $B_{-1} := \mathbb{Z}$ durante esta demostración. Las fórmulas indicadas definen los $s_n: B_n \rightarrow B_{n+1}$ sobre bases de los B_n como grupos abelianos libres; entonces cada s_n se extiende aditivamente en un \mathbb{Z} -homomorfismo.

Para mostrar que estos s_n forman una homotopía contractiva de cadenas, basta verificar las siguientes relaciones sobre bases de cada B_n :

$$\varepsilon s_{-1} = 1 \text{ sobre } \mathbb{Z}; \quad \partial s_0 + s_{-1} \varepsilon = 1 \text{ sobre } B_0 = \mathbb{Z}G; \quad \partial s_n + s_{n-1} \partial = 1 \text{ sobre } B_n, \quad n \geq 1.$$

El primero sigue porque $\varepsilon s_{-1}(1 \in \mathbb{Z}) = \varepsilon(1 \in G) = (1 \in \mathbb{Z})$. El segundo viene de

$$\partial s_0(g) + s_{-1} \varepsilon(g) = \partial([g]) + s_{-1}(1) = (g - 1) + 1 = g \quad \text{para todo } g \in G.$$

Para $n \geq 2$, se calcula que

$$\begin{aligned} \partial s_n(g_0 | g_1 | \cdots | g_n) &= \partial([g_0 | g_1 | \cdots | g_n]) \\ &= g_0 | g_1 | \cdots | g_n + \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{j+1} [g_0 | g_1 | \cdots | g_j g_{j+1} | \cdots | g_n] + (-1)^{n+1} [g_0 | g_1 | \cdots | g_{n-1}]; \\ s_{n-1} \partial(g_0 | g_1 | \cdots | g_n) &= s_{n-1}(g_0 \partial([g_1 | \cdots | g_n])) \\ &= [g_0 g_1 | g_2 | \cdots | g_n] + \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j [g_0 | g_1 | \cdots | g_j g_{j+1} | \cdots | g_n] + (-1)^n [g_0 | g_1 | \cdots | g_{n-1}]. \end{aligned}$$

Al sumar las dos expresiones al lado derecho, se cancelan todos los términos excepto $g_0 | g_1 | \cdots | g_n$. Esto comprueba $\partial s_n + s_{n-1} \partial = 1$ sobre B_n para $n \geq 2$.

Luego, $\text{im}(\partial: B_n \rightarrow B_{n-1}) = \ker(\partial: B_{n-1} \rightarrow B_{n-2})$ para $n \geq 2$; e $\text{im}(\partial: B_1 \rightarrow B_0) = \ker \varepsilon$. Estas relaciones son idénticas en Ab y en $G\text{-Mod}$, así que (4.30) es exacta en $G\text{-Mod}$. \square

Es evidente de las Definiciones 4.53 y 4.54 que $\text{Hom}_G(B_n, A) = C^n(G, A)$ con $\delta\varphi = \varphi \circ \partial$ para $\varphi \in C^n(G, A)$. En otras palabras, los complejos de cocadenas $\text{Hom}_G(B_\bullet, A)$ y $C^\bullet(G, A)$ son isomorfos. Por lo tanto, tienen la misma cohomología. Esto dice que

$$H^n(G, A) \simeq \text{Ext}_G^n(\mathbb{Z}, A) \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

4.5 Cohomología de álgebras asociativas

Definición 4.56. Un **álgebra** (asociativa) sobre un cuerpo \mathbb{F} es un anillo A que es a la vez un espacio vectorial sobre \mathbb{F} , tal que $\alpha(bc) = (\alpha b)c = b(\alpha c)$ para $\alpha \in \mathbb{F}$ y $b, c \in A$; es decir, la multiplicación escalar y el producto del anillo A son compatibles.

Dicho de otra manera, una \mathbb{F} -álgebra es un espacio \mathbb{F} -vectorial junto con una operación \mathbb{F} -bilineal $A \times A \rightarrow A: (a, b) \mapsto ab$, tal que $(ab)c = a(bc)$ para $a, b, c \in A$. Esta operación define²⁹ una multiplicación \mathbb{F} -lineal $m: A \otimes A \rightarrow A$ dada por $m(a \otimes b) := ab$. \diamond

²⁹Los productos tensoriales sobre \mathbb{F} se escriben con \otimes simplemente; $A \otimes B$ es sinónimo de $A \otimes_{\mathbb{F}} B$.

Nótese que la asociatividad de la multiplicación es la igualdad de las aplicaciones lineales $m(m \otimes 1_A) = m(1_A \otimes m) : A \otimes A \otimes A \rightarrow A$. La *aplicación unidad*³⁰ $\eta : \mathbb{F} \rightarrow A : \alpha \mapsto \alpha 1$ cumple $m(\eta \otimes 1_A) = 1_A : \mathbb{F} \otimes A \rightarrow A$ y $m(1_A \otimes \eta) = 1_A : A \otimes \mathbb{F} \rightarrow A$. Una definición alternativa de una \mathbb{F} -álgebra es: un triple (A, m, η) de un objeto y dos morfismos en la categoría $\text{Vect-}\mathbb{F}$ que cumple estas tres relaciones.

Definición 4.57. Sea A una \mathbb{F} -álgebra asociativa y sea $X \in A\text{-Bimod-}A$ un A - A -bimódulo. Escribáse $C_0(A, X) := X$. Para $n \geq 1$, defínase $C_n(A, X) \in A\text{-Bimod-}A$ por

$$C_n(A, X) := X \otimes A^{\otimes n}.$$

Defínase la diferencial, $\beta : C_n(A, X) \rightarrow C_{n-1}(A, X)$, un morfismo de bimódulos, por:

$$\begin{aligned} \beta(x \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) &:= xa_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_n + \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j x \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_j a_{j+1} \otimes \cdots \otimes a_n \\ &\quad + (-1)^n a_n x \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

En el caso particular $X = A$ se ve que $C_n(A, A) = A^{\otimes(n+1)}$.

Un cálculo directo muestra que $\beta^2 = 0 : C_n(A, X) \rightarrow C_{n-2}(A, X)$ para $n \geq 2$. Entonces $(C_\bullet(A, X), \beta)$ es un complejo de cadenas. La **homología de Hochschild** de A con coeficientes en X es la homología $H_n(A, X) := Z_n(A, X)/B_n(A, X)$. En el caso $X = A$, se usa la abreviatura $HH_n(A) := H_n(A, A)$. \diamond

Ejemplo 4.58. Considérese el caso básico $X = A = \mathbb{F}$, el \mathbb{F} -álgebra unidimensional. Aquí $C_n(\mathbb{F}, \mathbb{F}) = \mathbb{F}^{\otimes(n+1)} \simeq \mathbb{F}$, porque el producto tensorial (sobre \mathbb{F}) colapsa en el producto ordinario de escalares: $\alpha_0 \otimes \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_n = \alpha_0 \alpha_1 \cdots \alpha_n$. La fórmula (4.31) se reduce a $\beta(1) = \sum_{j=0}^n (-1)^j = 1$ o 0 según n sea par o impar; el complejo de cadenas es periódico y acíclico:

$$\cdots \xrightarrow{1} \mathbb{F} \xrightarrow{0} \mathbb{F} \xrightarrow{1} \mathbb{F} \xrightarrow{0} \mathbb{F} \xrightarrow{1} \mathbb{F} \xrightarrow{0} \mathbb{F}.$$

Luego $HH_0(\mathbb{F}) = \mathbb{F}$, y $HH_n(\mathbb{F}) = 0$ para $n > 0$. \diamond

Definición 4.59. Sea A una \mathbb{F} -álgebra asociativa y sea $M \in A\text{-Bimod-}A$. Cada aplicación n -lineal $\varphi : A^n \rightarrow M$ determina una aplicación *lineal* $\tilde{\varphi} : A^{\otimes n} \rightarrow M$ por la fórmula

$$\tilde{\varphi}(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) := \varphi(a_1, \dots, a_n).$$

Esto permite dualizar el complejo de cadenas de la Definición 4.57 y obtener un complejo de cocadenas $(C^\bullet(A, M), b)$, definido como sigue. Tómese $C^0(A, M) := M$ y sea $C^1(A, M) =$

³⁰La Definición 4.56 asume que el álgebra A posee una identidad 1 (“ A es un anillo tal que...”). Para la homología de Hochschild para álgebras sin identidad, véase la sección 1.4 del libro de Loday.

$\text{Hom}_{\mathbb{F}}(A, M)$, las aplicaciones \mathbb{F} -lineales de A en M . Para $n \geq 2$, sea $C^n(A, M)$ la totalidad de aplicaciones n -lineales $\varphi: A^n \rightarrow M$. Ellos son A - A -bimódulos de manera obvia:

$$\underline{\varphi} \cdot c(a_1, \dots, a_n) := c \varphi(a_1, \dots, a_n), \quad \underline{c} \cdot \varphi(a_1, \dots, a_n) := \varphi(a_1, \dots, a_n) c.$$

Defínase la diferencial $b: C^n(A, M) \rightarrow C^{n+1}(A, M)$ por

$$\begin{aligned} \underline{b\varphi}(a_1, \dots, a_{n+1}) &:= a_1 \varphi(a_2, \dots, a_{n+1}) + \sum_{j=1}^n (-1)^j \varphi(a_1, \dots, a_j a_{j+1}, \dots, a_{n+1}) \\ &\quad + (-1)^{n+1} \varphi(a_1, \dots, a_n) a_{n+1}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

De nuevo, se ve que $b^2 = 0: C^n(A, M) \rightarrow C^{n+2}(A, M)$ para todo n . Entonces $(C^\bullet(A, M), b)$ es un complejo de cocadenas. La **cohomología de Hochschild** de A con coeficientes en M es la cohomología $\underline{HH}^n(A, M) := Z^n(A, M)/B^n(A, M)$.

Al tomar $M = A^* = \text{Hom}_{\mathbb{F}}(A, \mathbb{F})$, se identifica $C^n(A, A^*)$ con las formas $(n+1)$ -lineales $\varphi: A^{n+1} \rightarrow \mathbb{F}$, o bien con el espacio vectorial dual de $C_n(A, A)$. En ese caso, se escribe $\underline{HH}^n(A) = H^n(A, A^*)$ como abreviatura. \diamond

Ejemplo 4.60. Las diferenciales en $C_1(A, A)$ y $C_2(A, A)$ son

$$\begin{aligned} \beta(a_0 \otimes a_1) &= a_0 a_1 - a_1 a_0, \\ \beta(a_0 \otimes a_1 \otimes a_2) &= a_0 a_1 \otimes a_2 - a_0 \otimes a_1 a_2 + a_2 a_0 \otimes a_1. \end{aligned}$$

Entonces $\underline{HH}_0(A) = A/[A, A]$. En particular, $\underline{HH}_0(A) = A$ si (y solo si) A es conmutativo.

Si $X \in A\text{-Bimod-}A$, entonces $\beta(x \otimes a) = xa - ax$; luego

$$H_0(A, X) = \underline{X}_A := X / \langle xa - ax : x \in X, a \in A \rangle.$$

Los elementos del bimódulo cociente \underline{X}_A se llaman **coinvariantes** de X por al acción de A .

Por otro lado, $\underline{HH}^0(A) = Z^0(A, A^*)$. Un 0-cociclo sobre A es una forma lineal $\tau \in A^*$ tal que $b\tau(a_0, a_1) = \tau(a_0 a_1) - \tau(a_1 a_0) = 0$ para todo $a_0, a_1 \in A$; es decir, τ es una **traza** sobre A .

Si $M \in A\text{-Bimod-}A$, $y \in M$, entonces $by(a) = ay - ya$; luego

$$H^0(A, M) = \underline{M}^A := \{y \in M : ay = ya \text{ para todo } a \in A\}.$$

Los elementos del subbimódulo $M^A \subseteq M$ son los **invariantes** de M por al acción de A . \diamond

► Hay un artificio que transforma los A - A -bimódulos de los apartados anteriores en módulos izquierdos (o derechos) para otra \mathbb{F} -álgebra. Si A es una \mathbb{F} -álgebra asociativa, su **álgebra envolvente**³¹ es $\underline{A}^e := A \otimes A^\circ$, con producto $(a_1 \otimes b_1^\circ)(a_2 \otimes b_2^\circ) = a_1 a_2 \otimes (b_2 b_1)^\circ$. Si X es un A - A -bimódulo, también es un \underline{A}^e -módulo izquierdo bajo $(a \otimes b^\circ)x := axb$. Además es un \underline{A}^e -módulo derecho bajo $x(a \otimes b^\circ) := bxa$.

³¹Desafortunadamente, este nombre también se usa para asociar un álgebra asociativa a un álgebra de Lie; no hay parentesco entre estos dos conceptos homónimos.

Definición 4.61. Sea $\underline{B}_n := A^{\otimes(n+2)} = A \otimes A^{\otimes n} \otimes A \in A\text{-Bimod-}A$. Nótese que $B_0 = A \otimes A$ es isomorfo a $A^e = A \otimes A^\circ$ como A^e -módulo izquierdo: $(a \otimes b^\circ)(a_0 \otimes a_1) = aa_0 \otimes a_1 b \leftrightarrow aa_0 \otimes (ba_1)^\circ$. Cada B_n es un A^e -módulo libre, porque hay un isomorfismo de \mathbb{F} -álgebras

$$\theta : A^e \otimes A^{\otimes n} \xrightarrow{\simeq} B_n : (a \otimes b^\circ) \otimes x \mapsto a \otimes x \otimes b. \quad (4.33)$$

Los B_n forman un complejo de cadenas bajo la diferencial

$$\beta'(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) := \sum_{j=0}^n (-1)^j a_0 \otimes \cdots \otimes a_j a_{j+1} \otimes \cdots \otimes a_{n+1}. \quad (4.34)$$

Al comparar esta fórmula con (4.31), para el caso $x = a_0 \otimes a_{n+1}^\circ$, se debe notar la ausencia del último término de (4.31). Sin embargo, la propiedad $(\beta')^2 = 0$ sigue válida.

Junto con el A^e -epimorfismo $\varepsilon : A^e \rightarrow A$ dado por $\varepsilon(a \otimes b^\circ) := ab$, la sucesión

$$\cdots \longrightarrow B_2 \xrightarrow{\beta'} B_1 \xrightarrow{\beta'} B_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0$$

es exacta. Esta *resolución libre* de A en la categoría $A^e\text{-Mod}$ se llama la **resolución barra**³² del \mathbb{F} -álgebra A . \diamond

Si $X \in A\text{-Bimod-}A$, el isomorfismo (4.33) induce otros isomorfismos de A - A -bimódulos:

$$X \otimes_{A^e} B_n \simeq X \otimes_{A^e} (A^e \otimes A^{\otimes n}) \simeq (X \otimes_{A^e} A^e) \otimes A^{\otimes n} \simeq X \otimes A^{\otimes n}. \quad (4.35)$$

Un cálculo directo verifica que las diferenciales $1_M \otimes \beta'$ de (4.34) y β de (4.31) están entrelazadas por estos isomorfismos.

Proposición 4.62. Si M es un A - A -bimódulo, entonces $H^n(A, M) \simeq \text{Ext}_{A^e}^n(A, M)$ para $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Un A^e -homomorfismo $\phi \in \text{Hom}_{A^e}(A, M)$ está determinado por $\phi(1) =: y \in M$. Como $a = (a \otimes 1^\circ)(1) = (1 \otimes a^\circ)(1)$ en A , se obtiene $ay = (a \otimes 1^\circ)(y) = (1 \otimes a^\circ)(y) = ya$ en M . Luego $\text{Hom}_{A^e}(A, M) = M^A = H^0(A, M)$. Esto demuestra el caso $n = 0$ del enunciado.

Los grupos $\text{Ext}_{A^e}^n(A, M)$, para $n \in \mathbb{N}$, forman la cohomología del complejo

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_{A^e}(B_0, M) \longrightarrow \text{Hom}_{A^e}(B_1, M) \longrightarrow \text{Hom}_{A^e}(B_2, M) \longrightarrow \cdots$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ (con $A^{\otimes 0} := \mathbb{F}$), hay un juego de isomorfismos:

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{A^e}(B_n, M) &\simeq \text{Hom}_{A^e}(A^e \otimes A^{\otimes n}, M) \simeq \text{Hom}_{A^e}(A^{\otimes n} \otimes A^e, M) \\ &\simeq \text{Hom}_{\mathbb{F}}(A^{\otimes n}, \text{Hom}_{A^e}(A^e, M)) \\ &\simeq \text{Hom}_{\mathbb{F}}(A^{\otimes n}, M) \simeq C^n(A, M). \end{aligned}$$

El tercer isomorfismo viene de la Proposición 2.74.

Entonces, los complejos $C^\bullet(A, M)$ y $\text{Hom}_{A^e}(B_\bullet, M)$ son isomorfos y sus cohomologías también son isomorfos. \square

³²Algunos autores escriben $a_0[a_1|\cdots|a_n]a_{n+1} \equiv a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes a_{n+1} \in B_n$.

La relación entre las diferenciales anteriores β y β' motiva una diferencial alternativa para $C^n(A, M)$, al suprimir el último término en (4.32). En adelante, se usa el A - A -bimódulo $M = A^*$, tomando en cuenta que $C^n(A, A^*) \simeq C^{n+1}(A, \mathbb{F})$ es la totalidad de formas $(n+1)$ -lineales sobre A . La segunda diferencial para $C^\bullet(A, A^*)$ se define así:

$$\underline{b'}\varphi(a_0, a_1, \dots, a_{n+1}) := \sum_{j=0}^n (-1)^j \varphi(a_0, \dots, a_j a_{j+1}, \dots, a_{n+1}). \quad (4.36)$$

Entonces $(b')^2 = 0$, de modo que $(C^\bullet(A, A^*), b')$ es un complejo de cocadenas. Sin embargo, su cohomología no es interesante: este complejo es *acíclico*, en vista del siguiente resultado.

Escolio 4.63. Defínase $s: C^n(A, A^*) \rightarrow C^{n-1}(A, A^*)$, para $n \geq 1$, por:

$$\underline{s}\varphi(a_1, \dots, a_n) := \varphi(1, a_1, \dots, a_n),$$

Entonces $b'(\underline{s}\varphi) + \underline{s}(b'\varphi) = \varphi: C^n(A, A^*) \rightarrow C^n(A, A^*)$ para $n \geq 1$. Por lo tanto, los \underline{s} definen una homotopía contractiva del complejo $(C^{\bullet+1}(A, A^*), b')$. \square

► No obstante, la diferencial truncada b' juega un papel importante, porque permite armar un *bicomplejo* que introduce una variante de la co/homología de Hochschild. Para mayor brevedad, aquí se discute la versión cohomológica solamente. Además, *se supondrá en adelante*³³ *que el cuerpo \mathbb{F} tiene característica 0*.

Definición 4.64. El **permutador cíclico** es el operador λ sobre $C^n(A, A^*)$ definido por:

$$\underline{\lambda}\varphi(a_0, a_1, \dots, a_n) := (-1)^n \varphi(a_n, a_0, \dots, a_{n-1}). \quad (4.37)$$

Este $(-1)^n$ es el signo de la permutación cíclica $(a_0, a_1, \dots, a_n) \mapsto (a_n, a_0, \dots, a_{n-1})$. Un elemento $\varphi \in C^n(A, A^*)$ tal que $\underline{\lambda}\varphi = \varphi$ es una ***n-cocadena cíclica***. Ellos forman un subbimódulo $\underline{C}_\lambda^n(A, A^*) := \ker(1 - \lambda) \subseteq C^n(A, A^*)$.

Si además $b\varphi = 0$, φ es un ***n-cociclo cíclico***. Por ejemplo, un 1-cociclo cíclico φ cumple

$$\varphi(a_0, a_1) = -\varphi(a_1, a_0) \quad \text{y} \quad \varphi(a_0 a_1, a_2) - \varphi(a_0, a_1 a_2) + \varphi(a_2 a_0, a_1) = 0.$$

Un 1-coborde $\varphi(a_0, a_1) := b\psi(a_0, a_1) = \psi(a_0 a_1 - a_1 a_0)$ es automáticamente cíclico.

El **antisimetrizador cíclico** es el operador

$$N := 1 + \lambda + \lambda^2 + \dots + \lambda^n \quad \text{sobre} \quad C^n(A, A^*).$$

Como $\lambda^{n+1} = 1$, se ve que $N(1 - \lambda) = (1 - \lambda)N = 0$. \diamond

³³ \mathbb{F} tiene característica p , para p primo, si $p \cdot 1 = 0$ en \mathbb{F} . De lo contrario, el homomorfismo $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{F}: r \mapsto r \cdot 1$ es inyectivo, y se dice que \mathbb{F} tiene característica 0. Un cuerpo finito tiene característica positiva; los cuerpos \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} y todas sus extensiones tienen característica 0.

Lema 4.65. Las siguientes identidades entre operadores sobre $C^n(A, A^*)$ son válidas:

$$b'(1 - \lambda) = (1 - \lambda)b, \quad bN = Nb'. \quad (4.38)$$

Demostración. Sea $r := b - b' : C^n(A, A^*) \rightarrow C^{n+1}(A, A^*)$, de modo que

$$r\varphi(a_0, a_1, \dots, a_{n+1}) := (-1)^{n+1}\varphi(a_{n+1}a_0, a_1, \dots, a_n).$$

Entonces, para $j = 0, 1, \dots, n$ vale:

$$\lambda^{-j-1}r\lambda^j\varphi(a_0, \dots, a_{n+1}) = (-1)^j\varphi(a_0, \dots, a_ja_{j+1}, \dots, a_{n+1})$$

Al notar que $\lambda^{n+1} = 1$ sobre $C^n(A, A^*)$ y $\lambda^{-n-2} = 1$ sobre $C^{n+1}(A, A^*)$, se obtiene

$$b' = \sum_{j=0}^n \lambda^{-j-1}r\lambda^j, \quad b = b' + r = \sum_{j=0}^{n+1} \lambda^{-j-1}r\lambda^j,$$

de donde

$$(1 - \lambda)b = \sum_{j=0}^n \lambda^{-j-1}r\lambda^j + r - \sum_{j=0}^n \lambda^{-j}r\lambda^j - \lambda^{-n-1}r = \sum_{j=0}^n \lambda^{-j-1}r\lambda^j - \sum_{j=1}^{n+1} \lambda^{-j}r\lambda^j = b'(1 - \lambda).$$

Además, al ser $\lambda N = N$ sobre $C^n(A, A^*)$ y $N\lambda = N$ sobre $C^{n+1}(A, A^*)$, se obtiene

$$\begin{aligned} bN &= \sum_{j=0}^{n+1} \lambda^{-j-1}r\lambda^jN = (\lambda^{-1} + \dots + \lambda^{-n-1} + 1)rN = NrN \\ &= Nr(1 + \lambda + \dots + \lambda^n) = N \sum_{j=0}^n \lambda^{-j-1}r\lambda^j = Nb'. \end{aligned} \quad \square$$

Definición 4.66. Si $\varphi \in C^n(A, A^*)$, la identidad (4.38) implica que $b\varphi \in C^{n+1}_\lambda(A, A^*)$, porque $(1 - \lambda)(b\varphi) = b'((1 - \lambda)\varphi) = 0$. Entonces $(C^\bullet_\lambda(A, A^*), b)$ es un *subcomplejo* de $C^\bullet(A, A^*)$. La cohomología de este complejo es la **cohomología cíclica** de la \mathbb{F} -álgebra A . Su grupo de cohomología en grado n se denota por $\underline{HC}^n(A)$, usualmente.³⁴ \diamond

Resulta, como se verificará enseguida, que esta cohomología coincide con la cohomología del complejo total $\text{Tot}^\bullet CC$ de un bicomplejo cuyos diferenciales son los operadores $b, -b', N$ y $1 - \lambda$, entre diversas copias de los $C^n(A, A^*)$.

³⁴Estos “grupos” de hecho son espacios \mathbb{F} -vectoriales. Las letras HC significan *homologie cyclique*. Hay una versión dual de la teoría, donde λ permuta cíclicamente los factores $a_0 \otimes \dots \otimes a_n$ de un tensor simple en $C_n(A, A)$. En vez de las relaciones (4.38), se usan las fórmulas transpuestas $(1 - \lambda)\beta' = \beta(1 - \lambda)$, $N\beta = \beta'N$. Entonces $C^\lambda_n(A, A) := \text{coker}(1 - \lambda)$ es un bimódulo cociente de $C_n(A, A)$ y ellos forman un complejo de cadenas $C^\lambda_\bullet(A, A)$, cuya homología, en grado n , se denota por $\underline{HC}_n(A)$. Para esta **homología cíclica** de \mathbb{F} -álgebras, véase el capítulo 1 del libro de Loday.

Definición 4.67. Los A - A -bimódulos $CC^{mn} := C^m(A, A^*)$ son entradas de un bicomplejo $CC^{\bullet\bullet}$, con las diferenciales ilustradas:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 \uparrow b & & \uparrow -b' & & \uparrow b & & \uparrow -b' \\
 C^2(A, A^*) & \xrightarrow{1-\lambda} & C^2(A, A^*) & \xrightarrow{N} & C^2(A, A^*) & \xrightarrow{1-\lambda} & C^2(A, A^*) \xrightarrow{N} \dots \\
 \uparrow b & & \uparrow -b' & & \uparrow b & & \uparrow -b' \\
 C^1(A, A^*) & \xrightarrow{1-\lambda} & C^1(A, A^*) & \xrightarrow{N} & C^1(A, A^*) & \xrightarrow{1-\lambda} & C^1(A, A^*) \xrightarrow{N} \dots \\
 \uparrow b & & \uparrow -b' & & \uparrow b & & \uparrow -b' \\
 C^0(A, A^*) & \xrightarrow{1-\lambda} & C^0(A, A^*) & \xrightarrow{N} & C^0(A, A^*) & \xrightarrow{1-\lambda} & C^0(A, A^*) \xrightarrow{N} \dots
 \end{array} \tag{4.39}$$

Cada cuadrada anticonmuta, en virtud de las identidades (4.38). Las identidades $b^2 = 0$, $(b')^2 = 0$ y $N(1 - \lambda) = (1 - \lambda)N = 0$ entonces dice que este es un bicomplejo de cocadenas. El complejo total $\text{Tot}^\bullet CC$ tiene entradas:

$$\text{Tot}^r CC := \bigoplus_{m+n=r} CC^{mn} = \bigoplus_{0 \leq m \leq r} C^m(A, A^*). \quad \diamond$$

El bicomplejo (4.39) es dual a otro bicomplejo de cadenas $CC_{\bullet\bullet}$ con entradas $CC_{mn} := C_m(A, A)$, morfismos verticales β y $-\beta'$, y morfismos horizontales $1 - \lambda$ y N sobre cada $C_m(A, A)$. La homología de su complejo total coincide con la homología cíclica de A .³⁵

Lema 4.68. Las columnas impares y todas las filas del bicomplejo (4.39) son complejos acíclicos.

Demostración. Las columnas impares $(C^\bullet(A, M), -b')$ son acíclicos por el Escolio 4.63.

Los operadores $1 - \lambda$ y N sobre $C^m(A, A^*)$ satisfacen $\ker(1 - \lambda) = C_\lambda^m(A, A^*) = \text{im } N$. De hecho, si $\lambda\varphi = \varphi$ en $C^m(A, A^*)$, entonces $\varphi = N((m+1)^{-1}\varphi)$. Por otro lado, $N(1 - \lambda) = 0$ implica que $\text{im}(1 - \lambda) \subseteq \ker N$; y si $\psi \in \ker N$, la ecuación $\varphi - \lambda\varphi = \psi$ tiene la solución

$$\varphi := -\frac{1}{m+1}(\lambda\psi + 2\lambda^2\psi + \dots + m\lambda^m\psi),$$

así que $\text{im}(1 - \lambda) = \ker N$. Entonces la fila m de $CC^{\bullet\bullet}$ es exacta. Al definir dos operadores h, h' sobre $C^m(A, A^*)$ por:

$$h\psi := -\frac{1}{m+1}(\lambda + 2\lambda^2 + \dots + m\lambda^m)\psi, \quad h'\varphi := \frac{1}{m+1}\varphi, \tag{4.40}$$

³⁵Este bicomplejo dual fue introducido en: Boris L. Tsygan, “The homology of matrix Lie algebras over rings and the Hochschild homology”, *Russian Mathematical Surveys* **38** (1983), 198–199. Este artículo de dos páginas constituye una exposición de la tesis doctoral de Tsygan!

se observa que $h(1 - \lambda) + Nh' = 1$, o lo que es lo mismo, $h'N + (1 - \lambda)h = 1$. Esto dice que h y h' , repetidas periódicamente, forman una homotopía de cocadenas contractiva de la fila m del bicomplejo.

Todos estos cálculos son válidas porque $(m + 1)^{-1} \in \mathbb{F}$ para todo $m \in \mathbb{N}$, puesto que \mathbb{F} tiene característica 0. \square

Para comparar las cohomologías de los complejos $C_\lambda^\bullet := C_\lambda^\bullet(A, A^*)$ y $\text{Tot}^\bullet CC$, se puede *aumentar* el bicomplejo $CC^{\bullet\bullet}$ al agregar $C_\lambda^\bullet(A, A^*)$ como una columna extra a la izquierda:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & \uparrow b & & \uparrow b & & \uparrow -b' & & \uparrow b & & \uparrow -b' \\
 0 & \longrightarrow & C_\lambda^2 & \xrightarrow{j} & C^2 & \xrightarrow{1-\lambda} & C^2 & \xrightarrow{N} & C^2 & \xrightarrow{1-\lambda} & C^2 & \xrightarrow{N} & \dots \\
 & \uparrow b & & \uparrow b & & \uparrow -b' & & \uparrow b & & \uparrow -b' \\
 0 & \longrightarrow & C_\lambda^1 & \xrightarrow{j} & C^1 & \xrightarrow{1-\lambda} & C^1 & \xrightarrow{N} & C^1 & \xrightarrow{1-\lambda} & C^1 & \xrightarrow{N} & \dots \\
 & \uparrow b & & \uparrow b & & \uparrow -b' & & \uparrow b & & \uparrow -b' \\
 0 & \longrightarrow & C_\lambda^0 & \xrightarrow{j} & C^0 & \xrightarrow{1-\lambda} & C^0 & \xrightarrow{N} & C^0 & \xrightarrow{1-\lambda} & C^0 & \xrightarrow{N} & \dots
 \end{array}$$

donde cada $j: C_\lambda^m(A, A^*) = \ker(1 - \lambda) \hookrightarrow C^m(A, A^*)$ es la inclusión. Hay una inclusión correspondiente $i: C_\lambda^m(A, A^*) \hookrightarrow \text{Tot}^m CC$ en el primer sumando del complejo total:

$$i(\varphi) := (\varphi, 0, \dots, 0) \in C^m \oplus C^{m-1} \oplus \dots \oplus C^0.$$

Nótese que i entrelaza las diferenciales: $i(b\varphi) = (b\varphi, 0, \dots, 0) = d(\varphi, 0, \dots, 0) = d(i\varphi)$ porque $(1 - \lambda)\varphi = 0$ cuando $\varphi \in C_\lambda^m(A, A^*)$. Por lo tanto cada i induce un homomorfismo en cohomología: $i^*: HC^m(A) \rightarrow H^m(\text{Tot}^\bullet CC)$. Al usar el algoritmo zigzag de la Proposición 3.41 (*mutatis mutandis*) se obtiene el resultado siguiente.

Escolio 4.69. Cada homomorfismo $i^*: HC^m(A) \rightarrow H^m(\text{Tot}^\bullet CC)$ es un isomorfismo. \square

La definición de la cohomología cíclica a partir de $C_\lambda^\bullet(A, A^*)$ se debe a Connes (1985). Fue un ingrediente esencial de su programa de extender la geometría diferencial al ámbito de álgebras de coordenadas no conmutativas.³⁶ En su enfoque, Connes introdujo un bicomplejo diferente de (4.39), al combinar los morfismos horizontales N , $1 - \lambda$ y una homotopía del complejo $(C^\bullet(A, A^*), b')$. Defínase $s': C^{n+1}(A, A^*) \rightarrow C^n(A, A^*)$ por:

$$\underline{s'}\varphi(a_0, \dots, a_n) := (-1)^n \varphi(a_0, \dots, a_n, 1).$$

Al comparar s' con el morfismo s del Escolio 4.63, se ve que $s' = -s\lambda^{-1}$.

³⁶El artículo fundamental es: Alain Connes, “Noncommutative differential geometry”, *Publications Mathématiques de l’Institut de Hautes Études Supérieures* **62** (1985), 257–360.

Definición 4.70. Defínase el morfismo $B: C^{m+1}(A, A^*) \rightarrow C^m(A, A^*)$, para $m \in \mathbb{N}$, por $B := N s'(1 - \lambda)$. Es inmediato que $B^2 = 0$. Nótese que B obra entre columnas pares consecutivas del complejo $CC^{\bullet\bullet}$:

$$\begin{array}{ccc} C^{m+1}(A, A^*) & \xrightarrow{1-\lambda} & C^{m+1}(A, A^*) \\ & \begin{array}{c} \uparrow -b' \\ \downarrow s' \end{array} & \\ C^m(A, A^*) & \xrightarrow{N} & C^m(A, A^*). \end{array}$$

Es fácil comprobar que $b'(s'\varphi) + s'(b'\varphi) = 1$, así que tanto s' como s son homotopías contractivas del complejo con diferencial b' . Al usar las identidades (4.38) se obtiene

$$bB + Bb = bNs'(1 - \lambda) + Ns'(1 - \lambda)b = N(b's' + s'b')(1 - \lambda) = N(1 - \lambda) = 0.$$

Entonces, los (b, B) son morfismos de un **bicomplejo de Connes**, cuyas entradas no nulas son $\underline{BC}^{mn} := CC^{m-n, 2n} = C^{m-n}(A, A^*)$ para $m \geq n \geq 0$. \diamond

El uso de B elimina los columnas impares (acíclicos) del bicomplejo $CC^{\bullet\bullet}$. Nótese que b es de grado $+1$ pero B es de grado -1 como operadores sobre el bimódulo graduado $C^\bullet(A, A^*)$. Para ilustrar B como “diferencial horizontal” del bicomplejo $BC^{\bullet\bullet}$, es necesario ajustar la posición de las columnas pares de $CC^{\bullet\bullet}$, así:

$$\begin{array}{ccccccc} & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & \uparrow b & & \uparrow b & & \uparrow b & & \uparrow b \\ C^3(A, A^*) & \xrightarrow{B} & C^2(A, A^*) & \xrightarrow{B} & C^1(A, A^*) & \xrightarrow{B} & C^0(A, A^*) \\ & \uparrow b & & \uparrow b & & \uparrow b & & \\ C^2(A, A^*) & \xrightarrow{B} & C^1(A, A^*) & \xrightarrow{B} & C^0(A, A^*) & & & \\ & \uparrow b & & \uparrow b & & & & \\ C^1(A, A^*) & \xrightarrow{B} & C^0(A, A^*) & & & & & \\ & \uparrow b & & & & & & \\ C^0(A, A^*) & & & & & & & \end{array} \quad (4.41)$$

Las cocadenas del complejo total de este bicomplejo son sumas directas de cocadenas de Hochschild de la misma paridad:

$$\text{Tot}^r BC := C^r \oplus C^{r-2} \oplus C^{r-4} \oplus \dots \oplus C^{\#r},$$

donde $\#r = 0$ o 1 según sea n par o impar.

Proposición 4.71. *Hay isomorfismos $H^r(\text{Tot}^\bullet BC) \simeq HC^r(A)$ para cada $r \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Denótese por $\text{Tot}^r CC_{\text{par}}$ la totalidad de cocadenas en $\text{Tot}^r CC$ de la forma $\psi = (\psi_r, 0, \psi_{r-2}, 0, \dots)$ con entradas en las columnas pares solamente. Defínase un morfismo $p: \text{Tot}^r CC_{\text{par}} \rightarrow \text{Tot}^r BC \oplus \text{Tot}^{r-1} BC$ por

$$p := \begin{pmatrix} 1 \\ Ns' \end{pmatrix} : \psi \mapsto \begin{pmatrix} (\psi_r, \psi_{r-2}, \psi_{r-4}, \dots) \\ (Ns'\psi_r, Ns'\psi_{r-2}, Ns'\psi_{r-4}, \dots) \end{pmatrix}.$$

Entonces las relaciones (4.38) y $BN = 0$ implican que

$$\begin{aligned} (b + B)p &= (b + B) \begin{pmatrix} 1 \\ Ns' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b + B \\ bNs' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b + B \\ Nb's' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b + Ns'(1 - \lambda) \\ N - Ns'b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & Ns' \\ 1 - \lambda & -b' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & N \\ 1 - \lambda & -b' \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} b & N \\ 1 - \lambda & -b' \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Este cálculo dice que p entrelaza la diferencial $(b + B)$ de $\text{Tot}^\bullet BC$ y la diferencial de dos columnas del complejo periódico $\text{Tot}^\bullet CC$. Ahora se puede extender p a todo $\text{Tot}^\bullet BC$ al definirlo como cero sobre las columnas impares de $CC^{\bullet\bullet}$. De esta manera se llega a una sucesión exacta de complejos de cocadenas:

$$0 \longrightarrow (C^\bullet(A, A^*), -b') \xrightarrow{j} \text{Tot}^\bullet CC \xrightarrow{p} \text{Tot}^\bullet BC \longrightarrow 0,$$

donde j está dada por la inclusión de la primera columna impar en el bicomplejo $CC^{\bullet\bullet}$. Como esta columna es un complejo contractible (por la homotopía $-s'$), el morfismo en cohomología $p^*: H^r(\text{Tot}^\bullet BC) \rightarrow H^r(\text{Tot}^\bullet CC) = HC^r(A)$ es un isomorfismo. \square

Ejemplo 4.72. Para el álgebra unidimensional $A = \mathbb{F}$, se calcula $HC^\bullet(\mathbb{F})$ con el bicomplejo de Connes. Si $\varphi \in C^m(\mathbb{F}, \mathbb{F}^*)$, entonces $\varphi(\alpha_0, \dots, \alpha_n) = \alpha_0 \cdots \alpha_n \varphi(1, 1, \dots, 1)$ por multilinealidad, así que $C^m(\mathbb{F}, \mathbb{F}^*)$ es unidimensional, con base $\{\psi_n\}$ dado por $\psi_n(1, 1, \dots, 1) := 1$.

Ahora, si n es par, entonces $b\psi_n = \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \psi_{n+1} = 0$. Además se ve que $(1 - \lambda)\psi_n = 0$ y por ende $B\psi_n = 0$.

En cambio, si n es impar, entonces $b\psi_n = \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \psi_{n+1} = \psi_{n+1}$. Además, $(1 - \lambda)\psi_n = 2\psi_n$; $s'\psi_n = \psi_{n-1}$; y $N\psi_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \psi_{n-1} = n\psi_{n-1}$. En resumen, $B\psi_n = 2n\psi_{n-1}$.

Como resultado, el complejo total $\text{Tot}^\bullet BC$ tiene la forma

$$\mathbb{F} \xrightarrow{0} \mathbb{F} \xrightarrow{d_1} \mathbb{F}^2 \xrightarrow{0} \mathbb{F}^2 \xrightarrow{d_2} \mathbb{F}^3 \xrightarrow{0} \mathbb{F}^3 \xrightarrow{d_3} \dots$$

donde cada d_j es inyectiva con un conúcleo unidimensional. Por ejemplo, $d_2(\psi_3, \psi_1) = (\psi_4, 7\psi_2, 2\psi_0)$ – los términos a la derecha no se anulan porque \mathbb{F} tiene característica 0. En conclusión:

$$HC^n(\mathbb{F}) = \begin{cases} \mathbb{F} & \text{si } n \text{ es par,} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases} \quad \diamond$$

► El aspecto más evidente del bicomplejo $CC^{\bullet\bullet}$ en (4.39) es su *periodicidad*: es isomorfo al bicomplejo $CC^{\bullet\bullet}[0, 2]$ obtenido al correr las columnas dos pasos hacia la derecha. Este corrimiento puede verse como un operador S sobre $CC^{\bullet\bullet}$ que lleva CC^{mn} a $CC^{m,n+2}$. El conúcleo de ese operador se identifica con las primeras dos columnas de (4.39), dando lugar a una sucesión exacta corta de bicomplejos:

$$0 \longrightarrow CC^{\bullet\bullet} \xrightarrow{S} CC^{\bullet\bullet} \xrightarrow{I} CC^{\bullet 0} \oplus CC^{\bullet 1} \longrightarrow 0. \quad (4.42a)$$

Al pasar a los complejos totales, se obtiene un morfismo $S: \text{Tot}^{n-2} CC \rightarrow \text{Tot}^n CC$ y también $I: \text{Tot}^n CC \rightarrow CC^{n,0} \oplus CC^{n-1,1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$S(\varphi_{n-2}, \varphi_{n-3}, \dots, \varphi_0) := (0, 0, \varphi_{n-2}, \varphi_{n-3}, \dots, \varphi_0), \quad (4.42b)$$

$$I(\psi_n, \psi_{n-1}, \dots, \psi_0) := (\psi_n, \psi_{n-1}). \quad (4.42c)$$

Escolio 4.73. La inclusión $(CC^{\bullet 0}, b) \hookrightarrow (CC^{\bullet 0}, b) \oplus (CC^{\bullet 1}, -b')$ induce un isomorfismo en cohomología (porque la segunda columna es un complejo acíclico). \square

Proposición 4.74. La sucesión exacta corta de complejos totales asociada a la SEC (4.42a) induce la siguiente **sucesión exacta larga de Connes** en cohomología:

$$\dots \longrightarrow HC^{n-1}(A) \xrightarrow{I} HH^{n-1}(A) \xrightarrow{B} HC^{n-2}(A) \xrightarrow{S} HC^n(A) \xrightarrow{I} HH^n(A) \longrightarrow \dots \quad (4.43)$$

Demostración. En vista de los Escolios 4.69 y 4.73, la inclusión $\varphi \mapsto (\varphi, 0): Z_\lambda^n(A, A^*) \hookrightarrow CC^{n,0} \oplus CC^{n-1,1}$ induce un homomorfismo³⁷ $I: [\varphi]_\lambda \rightarrow [\varphi]: HC^n(A) \rightarrow HH^n(A)$. Este coincide con el homomorfismo I inducido por el morfismo I de cocadenas (4.42c).

El homomorfismo S de (4.43) viene del morfismo (4.42b), que tiene grado $+2$ entre módulos de $\text{Tot}^\bullet CC$. La aplicación $B: HH^{n-1}(A) \rightarrow HC^{n-2}(A)$ es el homomorfismo conector de la sucesión exacta larga obtenida de la SEC (4.42a).

Para obtener una descripción más explícita de B , a partir del lema de la culebra, considérese el siguiente diagrama con filas exactas:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Tot}^{n-1} CC & \xrightarrow{S} & \text{Tot}^{n+1} CC & \xrightarrow{I} & CC^{n+1,0} \oplus CC^{n,1} \\ & & \uparrow d' & & \uparrow d & & \uparrow d'' \\ & & \text{Tot}^{n-2} CC & \xrightarrow{S} & \text{Tot}^n CC & \xrightarrow{I} & CC^{n,0} \oplus CC^{n-1,1} \longrightarrow 0 \end{array}$$

donde $S^{-1} \circ d \circ I^{-1}: \ker d'' \rightarrow \text{coker } d'$ induce $B: HH^n(A) \rightarrow HC^{n-1}(A)$. En detalle:

$$I^{-1}(\psi_n, \psi_{n-1}) := (\psi_n, \psi_{n-1}, 0, \dots, 0);$$

$$d(\psi_n, \psi_{n-1}, 0, \dots, 0) := (b\psi_n, (1-\lambda)\psi_n - b'\psi_{n-1}, N\psi_{n-1}, 0, \dots, 0);$$

$$S^{-1}(0, 0, N\psi_{n-1}, 0, \dots, 0) := (N\psi_{n-1}, 0, \dots, 0).$$

³⁷ Aquí se denota la coclase de φ en $HC^n(A)$ por $[\varphi]_\lambda$ para distinguirla de la coclase $[\varphi]$ de φ en $HH^n(A)$.

Este cálculo solo es aplicable a elementos $(\psi_n, \psi_{n-1}) \in \ker d''$, esto es, pares que cumplen $b\psi_n = 0$ y $(1 - \lambda)\psi_n = b'\psi_{n-1}$, en cuyo caso $d \circ I^{-1}$ los lleva a la imagen de S . Entonces B lleva la coclase $[(\psi_n, \psi_{n-1})]$ en la coclase $[(N\psi_{n-1}, 0, \dots, 0)]$ del complejo total $\text{Tot}^\bullet CC$.

Para simplificar el cálculo del homomorfismo conector, tómese $\psi_n \in Z^n(A, A^*)$, un cociclo de Hochschild; y sea $\psi_{n-1} := s'(1 - \lambda)\psi_n$. Entonces $b'\psi_{n-1} = (1 - \lambda)\psi_n$ porque $s'b'(1 - \lambda)\psi_n = s'(1 - \lambda)b\psi_n = 0$; por lo tanto, $(\psi_n, \psi_{n-1}) \in \ker d''$. Al recordar el morfismo $B := Ns'(1 - \lambda)$ de la Definición 4.70, se ve que

$$N\psi_{n-1} = N(s'b' + b's')\psi_{n-1} = B\psi_n + bNs'\psi_{n-1},$$

y este es un b -cociclo en $\text{im } N = C_\lambda^{n-1}(A, A^*)$. Entonces $B: HH^n(A) \rightarrow HC^{n-1}(A)$ está dado por $[\psi_n] \mapsto [N\psi_{n-1}]_\lambda = [B\psi_n]_\lambda$; esto es, $B[\psi_n] := [B\psi_n]_\lambda$. \square

La sucesión exacta larga (4.43), que entrelaza las cohomologías cíclica y de Hochschild, fue introducida por Connes como una pieza clave de su “geometría diferencial no conmutativa”.³⁸ Es posible completar las fórmulas explícitas para I y B incluidas en la demostración anterior con una fórmula explícita $S: Z_\lambda^{n-2}(A, A^*) \rightarrow Z_\lambda^n(A, A^*)$ tal que $S[\psi_{n-2}]_\lambda = [S\psi_{n-2}]_\lambda$; por ejemplo, al usar las “homotopías horizontales” (4.40), la fórmula $S\psi_{n-2} := -bhb'h'\psi_{n-2}$ cumple ese propósito.³⁹

4.6 Cohomología de Čech

La homología y cohomología singulares no fueron las únicas opciones usadas para estudiar la estructura de un espacio topológico X . Pavel Alexandrov introdujo el concepto de *nervio* de un cubrimiento abierto \mathcal{U} de X , como alternativa a la aproximación simplicial; a cada cubrimiento se le asocia un complejo de cadenas. En 1932, Eduard Čech consideró *todos* los cubrimientos abiertos de X , parcialmente ordenados por refinamiento; con un proceso límite, se obtiene los grupos de homología y cohomología que llevan su nombre.

Esta sección pretende ser una breve introducción a la cohomología de Čech, en el contexto de variedades diferenciales; aunque el tratamiento sigue válido, con pequeños cambios, para espacios topológicos en general. (Esa generalidad fue la motivación original de Alexandrov y Čech). Desde luego, hay teoremas de isomorfía con la cohomología de de Rham.

En esta sección, M denotará una variedad diferencial y A será un grupo abeliano.

³⁸El artículo de Connes (1985, *op. cit.*) introduce la cohomología cíclica y el operador S mediante un formalismo de *álgebras diferenciales graduadas*, no necesariamente conmutativas, que generalizan y reemplazan el álgebra diferencial superconmutativa $\mathcal{A}^\bullet(M)$ de la geometría diferencial “ordinaria” de variedades. En el caso “conmutativo”, hay una relación estrecha entre la cohomología cíclica del álgebra $A = C^\infty(M)$ y la *homología* de de Rham de M .

³⁹Para la justificación de esta fórmula y su relación con otra fórmula explícita de Connes, véase la sección 10.1 del libro: José M. Gracia-Bondía, Joseph C. Várilly & Héctor Figueroa, *Elements of Noncommutative Geometry*, Birkhäuser, Boston, 2001.

Definición 4.75. Si $\mathcal{U} = \{U_j : j \in J\}$ es un cubrimiento abierto de M , el **nervio** de \mathcal{U} es la familia de intersecciones finitas (no vacías) $U_{j_0} \cap U_{j_1} \cap \cdots \cap U_{j_k} \neq \emptyset$ de elementos de \mathcal{U} . Para cada $k \in \mathbb{N}$, una **k -cocadena de Čech** sobre \mathcal{U} , con coeficientes en A , es una familia de elementos $a_{j_0 j_1 \dots j_k} \in A$, indiciado por tales intersecciones no vacías de $(k+1)$ miembros de \mathcal{U} . La totalidad de estas forma un grupo abeliano $C^k(\mathcal{U}, A)$.

De particular interés es el caso en donde \mathcal{U} es un *buen cubrimiento* de M , que siempre existe (véase la Definición 4.36). \diamond

En un contexto más amplio, se puede definir el **nervio de una categoría pequeña \mathcal{C}** . Este es un conjunto simplicial $\{C_n : n \in \mathbb{N}\}$ donde cada C_n es la totalidad de juegos de n morfismos consecutivos:

$$A_0 \xrightarrow{f_1} A_1 \xrightarrow{f_2} A_2 \xrightarrow{f_3} \cdots \xrightarrow{f_n} A_n$$

donde $\partial_j : C_n \rightarrow C_{n-1}$ omite A_j (reemplazando $A_{j-1} \xrightarrow{f_j} A_j \xrightarrow{f_{j+1}} A_{j+1}$ por $A_{j-1} \xrightarrow{f_{j+1} f_j} A_{j+1}$); y donde $\sigma_j : C_n \rightarrow C_{n+1}$ inserta 1_{A_j} (reemplazando A_j por $A_j \xrightarrow{1} A_j$).

Al considerar la categoría $\text{Top-}X \upharpoonright \mathcal{U}$, cuyos morfismos son las inclusiones entre intersecciones finitas de miembros de \mathcal{U} , se recupera el nervio de \mathcal{U} de la definición anterior.

► Para las aplicaciones en geometría diferencial (o algebraica), se requiere una definición más amplia de cocadenas de Čech, en donde se cambia el grupo abeliano fijo A por una familia⁴⁰ de grupos abelianos $\underline{A} := \{A_{j_0 j_1 \dots j_k}\}$ que dependen de los elementos del nervio de \mathcal{U} . Para los efectos de esta sección, los elementos de $A_{j_0 j_1 \dots j_k}$ serán las funciones suaves

$$a_{j_0 j_1 \dots j_k} : U_{j_0} \cap U_{j_1} \cap \cdots \cap U_{j_k} \rightarrow A$$

donde A es una variedad con una ley de grupo abeliano. (Ejemplos son $A = \mathbb{Z}, \mathbb{R}$ o \mathbb{C} , con suma; o bien los grupos multiplicativos $A = \mathbb{R}^\times, \mathbb{C}^\times$ o $U(1)$.)⁴¹

Una familia de tales funciones $\underline{a} = \{a_{j_0 j_1 \dots j_k}\}$ es una k -cocadena de Čech sobre \mathcal{U} **con coeficientes en \underline{A}** . La totalidad de ellas se denota por $C^k(\mathcal{U}, \underline{A})$. Se identifica $C^k(\mathcal{U}, A)$ con el subgrupo de los elementos de $C^k(\mathcal{U}, \underline{A})$ cuyas componentes $a_{j_0 j_1 \dots j_k}$ son *funciones constantes* sobre sus dominios.

Por ejemplo, si M es una variedad diferencial n -dimensional con un atlas \mathcal{U} , los homeomorfismos $\phi_j : U_j \rightarrow \mathbb{R}^n$ que definen las cartas locales forman un elemento de $C^0(\mathcal{U}, \underline{\mathbb{R}^n})$.

⁴⁰En general, \underline{A} debe ser un *prehaz* de grupos abelianos sobre la base M . Los prehaces de funciones suaves considerados en esta sección bastan para los efectos de la geometría diferencial. En geometría algebraica se requieren otros prehaces; la cohomología de Čech esbozada aquí es un caso particular de “cohomología de haces”.

⁴¹Aquí $\mathbb{R}^\times := \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathbb{C}^\times := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $U(1) = \mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Definición 4.76. La diferencial $\delta: C^k(\mathcal{U}, \underline{A}) \rightarrow C^{k+1}(\mathcal{U}, \underline{A})$ del complejo de Čech $(C^\bullet(\mathcal{U}, \underline{A}), \delta)$ se define por

$$(\delta c)_{j_0 \dots j_{k+1}} := \sum_{r=0}^{k+1} (-1)^{k+1-r} c_{j_0 \dots \widehat{j_r} \dots j_{k+1}}.$$

En particular, si $a \in C^0(\mathcal{U}, \underline{A})$, $b \in C^1(\mathcal{U}, \underline{A})$, entonces (con notación aditiva):

$$(\delta a)_{ij} := a_i - a_j, \quad (\delta b)_{ijk} := b_{ij} - b_{ik} + b_{jk}.$$

Se ve que $\delta^2 = 0$ por cancelación de términos. El grupo $H^k(\mathcal{U}, \underline{A}) := Z^k(\mathcal{U}, \underline{A})/B^k(\mathcal{U}, \underline{A})$ es la cohomología de Čech de grado k asociada al cubrimiento \mathcal{U} , con coeficientes en \underline{A} .

Los cubrimientos abiertos de M forman un conjunto dirigido, bajo refinamiento. Entonces se puede tomar el “límite inductivo” de los grupos $H^k(\mathcal{U}, \underline{A})$ – el cual es un *colímite* en la categoría abeliana Ab . Así se define la **cohomología de Čech de la variedad M** (con coeficientes en \underline{A}):

$$\check{H}^k(M, \underline{A}) := \text{colim}_{\mathcal{U}} H^k(\mathcal{U}, \underline{A}). \quad (4.44)$$

En el caso de prehaces constantes, un teorema de geometría diferencial⁴² asegura que este colímite *se alcanza cuando \mathcal{U} es un buen cubrimiento*, de tal manera que $\check{H}^k(M, A) = H^k(\mathcal{U}, A)$ cuando \mathcal{U} es bueno.⁴³ \diamond

Ejemplo 4.77. Para calcular la cohomología de Čech de la esfera \mathbb{S}^2 con coeficientes en \mathbb{R} , primero se elige un buen cubrimiento de \mathbb{S}^2 . Sea $\tau: \Delta^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ la 2-símplice singular obtenido al proyectar un tetraedro regular inscrito T sobre \mathbb{S}^2 desde el origen de \mathbb{R}^3 . Sean $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4\}$ las cuatro facetas de τ ; cada faceta σ_j tiene un vecindario abierto $U_j \subset \mathbb{S}^2$ (obtenido, por ejemplo, al engordar σ_j por un monto $\varepsilon > 0$ en la métrica usual de \mathbb{S}^2); sea $\mathcal{U} := \{U_1, U_2, U_3, U_4\}$. Cada $U_i \cap U_j$ es un vecindario de la arista $\sigma_i \cap \sigma_j$; y cada $U_i \cap U_j \cap U_k$ es un vecindario del vértice $\sigma_i \cap \sigma_j \cap \sigma_k$; si ε es pequeño, todos son contractibles.

Entonces, las 0-cocadenas corresponden a los vértices, las 1-cocadenas corresponden a las aristas, y las 2-cocadenas corresponden a las facetas del tetraedro T . Por lo tanto,

$$C^0(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^4, \quad C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^6, \quad C^2(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^4.$$

Además, como $U_1 \cap U_2 \cap U_3 \cap U_4 = \emptyset$, se ve que $C^k(\mathcal{U}, \mathbb{R}) = 0$ para $k \geq 3$. Luego, el complejo de Čech se reduce a la sucesión:

$$0 \longrightarrow C^0(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \xrightarrow{\delta} C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \xrightarrow{\delta} C^2(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \longrightarrow 0. \quad (4.45)$$

⁴²Véase, por ejemplo, la sección 10 del libro de Bott y Tu, o el Apéndice D del libro de Conlon, *op. cit.*

⁴³Cada cubrimiento abierto de M admite un refinamiento que es un buen recubrimiento. Luego, los buenos cubrimientos forman una familia “cofinal” en su conjunto dirigido. En consecuencia, basta usar buenos cubrimientos para obtener el colímite (4.44).

Considérese la aplicación \mathbb{R} -lineal $\delta: C^0(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \rightarrow C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$. Nótese que $\mathbf{a} \in Z^0(\mathcal{U}, \mathbb{R}) = \ker \delta$ si y solo si $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$, así que $\check{H}^0(\mathbb{S}^2, \mathbb{R}) = Z^0(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}$; por el teorema de rango y nulidad, se obtiene $B^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}) = \text{im } \delta \simeq \mathbb{R}^4 / \ker \delta \simeq \mathbb{R}^3$.

Considérese $\delta: C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \rightarrow C^2(\mathcal{U}, \mathbb{R})$. Ahora se ve que $\mathbf{b} \in Z^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}) = \ker \delta$ si y solo si $b_{ij} - b_{ik} + b_{jk} = 0$ para $\{i, j, k\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$; este es un sistema de cuatro ecuaciones lineales, de rango 3, para los seis números $b_{ij} \in \mathbb{R}$; por lo tanto, $Z^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^3$. En particular, la sucesión (4.45) es exacta en $C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$, y por ende $\check{H}^1(\mathbb{S}^2, \mathbb{R}) = 0$.

Además, vale $B^2(\mathcal{U}, \mathbb{R}) = \text{im } \delta \simeq \mathbb{R}^6 / \ker \delta \simeq \mathbb{R}^3$. Como $Z^2(\mathcal{U}, \mathbb{R}) = C^2(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^4$, se obtiene $\check{H}^2(\mathbb{S}^2, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}$.

En resumen: $\check{H}^k(\mathbb{S}^2, \mathbb{R}) = \mathbb{R}, 0, \mathbb{R}$ para $k = 0, 1, 2$ respectivamente, igual que la cohomología de de Rham $H_{\text{dR}}^\bullet(\mathbb{S}^2)$. \diamond

► Aunque la cohomología de Čech puede parecer redundante, por su coincidencia con la cohomología de de Rham, resulta bastante útil para otro propósito: la clasificación de fibrados de línea sobre la base M .

Definición 4.78. Un **fibrado vectorial** $E \xrightarrow{\pi} M$ consta de una variedad diferencial M (la **base**), otra variedad diferencial E (el **espacio total**) y una **proyección** $\pi: E \rightarrow M$, la cual es una sumersión sobreyectiva que cumple dos condiciones:

- (a) cada **fibra** $E_x := \pi^{-1}(\{x\})$ es difeomorfo a un espacio vectorial fijo F sobre \mathbb{R} o \mathbb{C} (la **fibra típica**), cuya dimensión es el **rango** del fibrado;
- (b) el fibrado es *localmente trivial*: M tiene un cubrimiento por un sistema de cartas locales $\mathcal{U} = \{U_j\}$ y existen difeomorfismos $\psi_j: \pi^{-1}(U_j) \xrightarrow{\sim} U_j \times F$ que cumplen $\pi(\psi_j^{-1}(x, v)) = x$ para $x \in U_j, v \in F$. \diamond

Los fibrados vectoriales reales sobre M son objetos de una categoría $\text{VectBun-}(M, \mathbb{R})$, cuyos morfismos entre $E \xrightarrow{\pi} M$ y $E' \xrightarrow{\sigma} M$ son funciones suaves $f: E \rightarrow E'$ tales que $\sigma \circ f = \pi$, y cuyas restricciones a fibras $(f \upharpoonright E_x): E_x \rightarrow E'_x$ son aplicaciones \mathbb{R} -lineales.

Análogamente se define la categoría $\text{VectBun-}(M, \mathbb{C})$ de fibrados vectoriales complejos: las aplicaciones entre fibras deben ser \mathbb{C} -lineales.

Si el rango es 1, es decir $F \simeq \mathbb{F} = \mathbb{R}$ o \mathbb{C} , dícese que $E \xrightarrow{\pi} M$ es un **fibrado de línea** (real o complejo, según el caso).

Cuando $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, las aplicaciones

$$\psi_i \circ \psi_j^{-1}: (U_i \cap U_j) \times F \rightarrow (U_i \cap U_j) \times F$$

obedecen $\psi_i \circ \psi_j^{-1}(x, v) = (x, u_{ij}(x)v)$ donde $u_{ij}: U_i \cap U_j \rightarrow \text{GL}(F)$ son funciones suaves con valores en automorfismos lineales de F . Por su definición, es evidente que

$$u_{ij}(x)u_{jk}(x) = u_{ik}(x) \quad \text{para todo } x \in U_i \cap U_j \cap U_k. \quad (4.46)$$

Estas u_{ij} son las **funciones de transición** del fibrado vectorial. Un teorema de geometría diferencial⁴⁴ asegura que una familia de funciones de transición que cumple (4.46) determina un fibrado vectorial sobre M . (El fibrado vectorial $E \xrightarrow{\pi} M$ es *trivial* si hay un difeomorfismo $\psi: E \xrightarrow{\cong} M \times F$; en cuyo caso se puede tomar $\psi_j := \psi \upharpoonright U_j$, de donde cada $u_{ij} \equiv 1$ sobre $U_i \cap U_j$.)

Para fibrados de línea, al ser $GL(F) \simeq \mathbb{F}^\times$, se ve que $\mathbf{u} := \{u_{ij}\} \in C^1(\mathcal{U}, \underline{\mathbb{F}^\times})$ con una notación multiplicativa. Además, las relaciones $(\delta \mathbf{u})_{ijk} := u_{ij}u_{jk}/u_{ik} \equiv 1$ muestran que \mathbf{u} es un 1-cociclo de Čech con valores en $\underline{\mathbb{F}^\times}$.

Se puede objetar que este cociclo exhibe una dependencia de las “trivializaciones locales” ψ_j de la Definición 4.78. Dado el cubrimiento \mathcal{U} de M , es posible reemplazar ψ_j por otro difeomorfismo $\phi_j: \pi^{-1}(U_j) \rightarrow U_j \times \mathbb{F}$ que también cumple $\pi(\phi_j^{-1}(x, v)) = x$. Pero entonces $\phi_j \circ \psi_j^{-1}(x, v) = (x, h_j(x)v)$, donde $h_j: U_j \rightarrow \mathbb{F}^\times$ es suave. Este cambio conlleva la modificación $u_{ij} \mapsto (h_i/h_j)u_{ij}$.

Fíjese que $\mathbf{h} = \{h_j\} \in C^0(\mathcal{U}, \underline{\mathbb{F}^\times})$. La modificación de las funciones de transición se expresa, en notación aditiva, por $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{u} + \delta \mathbf{h}$ en $Z^1(\mathcal{U}, \underline{\mathbb{F}^\times})$: la clase $[\mathbf{u}] \in H^1(\mathcal{U}, \underline{\mathbb{F}^\times})$ no depende de la trivialización elegida. La dependencia residual del cubrimiento \mathcal{U} se elimina al aplicar el colímite (4.44). En conclusión: *los fibrados de línea reales están clasificados por el grupo de cohomología $\check{H}^1(M, \underline{\mathbb{F}^\times})$.*

► Estos grupos $\check{H}^1(M, \underline{\mathbb{R}^\times})$ y $\check{H}^1(M, \underline{\mathbb{C}^\times})$ no son fáciles de calcular. En el caso complejo, hay un artificio que reduce el cálculo a cohomologías con coeficientes constantes, en cuyo caso basta examinar un buen cubrimiento de M .

Definición 4.79. Considérese la sucesión exacta corta de grupos abelianos:⁴⁵

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{j} \mathbb{C} \xrightarrow{e} \mathbb{C}^\times \longrightarrow 1, \quad (4.47)$$

donde j es la inclusión, e es la función exponencial $e(z) := e^{2\pi iz}$. Si \mathcal{U} es un buen cubrimiento de M , se obtiene una sucesión exacta de complejos

$$0 \longrightarrow C^\bullet(\mathcal{U}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{j_\bullet} C^\bullet(\mathcal{U}, \mathbb{C}) \xrightarrow{e_\bullet} C^\bullet(\mathcal{U}, \mathbb{C}^\times) \longrightarrow 0.$$

Nótese que no hace falta subrayar \mathbb{Z} en esta expresión: por ser \mathbb{Z} discreta y cada intersección $U_{j_0} \cap \cdots \cap U_{j_k}$ conexa, los componentes de una k -cocadena con coeficientes en $\underline{\mathbb{Z}}$ son funciones constantes, necesariamente.

⁴⁴Véase, por ejemplo, el inciso 16.13.3 del libro: Jean Dieudonné, *Treatise on Analysis*, tomo III, Academic Press, New York, 1972.

⁴⁵Con notación aditiva para \mathbb{Z} y \mathbb{C} , pero notación multiplicativa para \mathbb{C}^\times . Se revierte a la notación aditiva en $C^\bullet(\mathcal{U}, \underline{\mathbb{C}^\times})$.

Las sucesiones exactas largas en cohomología para estos $C^\bullet(\mathcal{U}, -)$, seguido del colímite (4.44), dan lugar a una sucesión exacta larga en cohomología de Čech:

$$\cdots \xrightarrow{j_*} \check{H}^1(M, \underline{\mathbb{C}}) \xrightarrow{e_*} \check{H}^1(M, \underline{\mathbb{C}}^\times) \xrightarrow{\beta} \check{H}^2(M, \mathbb{Z}) \xrightarrow{j_*} \check{H}^2(M, \underline{\mathbb{C}}) \xrightarrow{e_*} \cdots$$

El homomorfismo $\beta: H^1(M, \underline{\mathbb{C}}^\times) \rightarrow \check{H}^2(M, \mathbb{Z})$ se llama el **homomorfismo de Bockstein**⁴⁶ asociado a la SEC de grupos (4.47). \diamond

Proposición 4.80. *El homomorfismo $\beta: \check{H}^1(M, \underline{\mathbb{C}}^\times) \rightarrow \check{H}^2(M, \mathbb{Z})$ es un isomorfismo.*

Demostración. Se puede determinar β explícitamente al seguir el protocolo del lema de la culebra. Sea \mathcal{U} un buen cubrimiento de M . Si $\mathbf{c} \in Z^1(\mathcal{U}, \underline{\mathbb{C}}^\times)$, cada intersección $U_i \cap U_j$ es contractible; por lo tanto, existen funciones suaves $b_{ij}: U_i \cap U_j \rightarrow \mathbb{C}$ tales que $e \circ b_{ij} = c_{ij}$. Esto dice que $\mathbf{c} = e \circ \mathbf{b}$ con $\mathbf{b} \in C^1(\mathcal{U}, \underline{\mathbb{C}})$.

Defínase $\mathbf{a} := \delta \mathbf{b} \in B^2(\mathcal{U}, \underline{\mathbb{C}})$, al colocar

$$a_{ijk}(x) := b_{ij}(x) - b_{ik}(x) + b_{jk}(x) \quad \text{para } x \in U_i \cap U_j \cap U_k. \quad (4.48)$$

Entonces $\exp(2\pi i a_{ijk}) = c_{ij}c_{jk}/c_{ik} \equiv 1$, así que a_{ijk} tomo valores en \mathbb{Z} . Cada $U_i \cap U_j \cap U_k$ es conexo, así que cada a_{ijk} es una función constante, de modo que $\mathbf{a} \in C^2(\mathcal{U}, \mathbb{Z})$. Es obvio de la fórmula (4.48) que

$$(\delta \mathbf{a})_{ijkl} := a_{ijk} - a_{ikl} + a_{ijl} - a_{jkl} = 0 \quad \text{sobre } U_i \cap U_j \cap U_k \cap U_l$$

de modo que $\delta \mathbf{a} = 0$ en $C^3(\mathcal{U}, \mathbb{Z})$. Dicho de otro modo, se ve que $\mathbf{a} \in Z^2(\mathcal{U}, \mathbb{Z})$.

Por otro lado, si $c'_{ij} := (h_i/h_j)c_{ij}$ con $\mathbf{h} \in C^0(\mathcal{U}, \underline{\mathbb{C}}^\times)$, entonces hay funciones suaves $k_i: U_i \rightarrow \mathbb{C}$ tales que $e \circ k_i = h_i$, pues cada U_i es contractible. Entonces $e \circ (b_{ij} + k_i - k_j) = c'_{ij}$. En otras palabras, al modificar $\mathbf{c} \mapsto \mathbf{c} + \delta \mathbf{h}$ en $Z^2(\mathcal{U}, \underline{\mathbb{C}})$, se obtiene $\mathbf{b} \mapsto \mathbf{b} + \delta \mathbf{k}$ en $C^1(\mathcal{U}, \underline{\mathbb{C}})$; y no hay cambio en $\mathbf{a} \in C^2(\mathcal{U}, \mathbb{Z})$. De esta manera, el homomorfismo $\beta_{\mathcal{U}}: H^1(\mathcal{U}, \underline{\mathbb{C}}^\times) \rightarrow H^2(\mathcal{U}, \mathbb{Z}) : [\mathbf{c}] \mapsto [\mathbf{a}]$ está bien definida.

Para ver que $\beta_{\mathcal{U}}$ es sobreyectivo, se puede usar una partición de la unidad suave $\{h_j\}$ con cada $\text{sop } h_j \subset U_j$. Dado $\mathbf{a} \in Z^2(\mathcal{U}, \mathbb{Z})$, defínase $\mathbf{b} \in C^1(\mathcal{U}, \underline{\mathbb{C}})$ por $b_{ij} := \sum_l a_{ijl} h_l$, y luego $\mathbf{c} \in C^1(\mathcal{U}, \underline{\mathbb{C}}^\times)$ por $c_{ij} := \exp(2\pi i b_{ij})$. Entonces

$$b_{ij} - b_{ik} + b_{jk} = \sum_l (a_{ijl} - a_{ikl} + a_{jkl}) h_l = \sum_l a_{ijk} h_l = a_{ijk}$$

al usar $\delta \mathbf{a} = 0$; por lo tanto, vale $\delta \mathbf{b} = \mathbf{a}$. Es obvio que $\beta_{\mathcal{U}}([\mathbf{a}]) = [\mathbf{c}]$.

Para ver que $\beta_{\mathcal{U}}$ es inyectivo, tómese $\mathbf{c} \in Z^1(\mathcal{U}, \underline{\mathbb{C}}^\times)$ tal que $[\mathbf{a}] = \beta_{\mathcal{U}}([\mathbf{c}]) = 0$ en $H^2(\mathcal{U}, \mathbb{Z})$. De nuevo, hay funciones $b'_{ij}: U_i \cap U_j \rightarrow \mathbb{C}$ tales que $e \circ b'_{ij} = c_{ij}$; y $b'_{ij} - b'_{ik} + b'_{jk}$ toma valores

⁴⁶Este tipo de homomorfismos conectores fue estudiado por el topólogo ruso Meyer Bockstein en 1958.

en \mathbb{Z} . Al redefinir $b_{ij}(x) := b'_{ij}(x) + n_{ij}$, se puede elegir los $n_{ij} \in \mathbb{Z}$ tales que $b_{ij} - b_{ik} + b_{jk} \equiv 0$ sobre cada $U_i \cap U_j \cap U_k$. Con la misma partición de la unidad, defínase $\mathbf{k} \in C^0(\mathcal{U}, \underline{\mathbb{C}})$ por $k_i := \sum_l b_{il} h_l$; entonces

$$k_i - k_j = \sum_l (b_{il} - b_{jl}) h_l = \sum_l b_{ij} h_l = b_{ij}$$

así que $\mathbf{b} = \delta \mathbf{k}$. Al colocar $h_i := \exp(2\pi i k_i)$, se obtiene $\mathbf{c} = \delta \mathbf{h}$ en $B^1(\mathcal{U}, \mathbb{C}^\times)$. Esto dice que $[\mathbf{c}] = 0$ en $H^2(\mathcal{U}, \underline{\mathbb{C}}^\times)$.

En el colímite (4.44), los isomorfismos $\beta_{\mathcal{U}}$ determinan $\beta: \check{H}^1(M, \underline{\mathbb{C}}^\times) \rightarrow \check{H}^2(M, \mathbb{Z})$ que a su vez es un isomorfismo. \square

Este resultado dice que los fibrados de línea complejos están clasificados por el grupo $\check{H}^2(M, \mathbb{Z})$, el cual a su vez coincide con $H^2(\mathcal{U}, \mathbb{Z})$ para cualquier buen cubrimiento de M .

► Un fibrado de línea complejo se llama **hermítico** si cada fibra $E_x \simeq \mathbb{C}$ está dotado de un producto escalar complejo, que depende suavemente de x . Esta condición no excluye fibrado de línea alguna, porque es posible dotar cualquier fibrado de rango 1 de esa estructura (de muchas maneras). Las funciones de transición deben conservar el producto escalar fibra por fibra, así que la condición necesaria y suficiente es que las funciones u_{ij} deben tomar valores en $U(1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, el grupo unitario de rango 1.

En tal caso, se puede replantear la discusión anterior en términos más explícitos. Se reemplaza la sucesión exacta de grupos (4.47) por otra:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{j} \mathbb{R} \xrightarrow{e} U(1) \longrightarrow 1,$$

y la sucesión exacta larga de grupos de cohomología de Čech se modifica en:

$$\cdots \xrightarrow{j_*} \check{H}^1(M, \underline{\mathbb{R}}) \xrightarrow{e_*} \check{H}^1(M, \underline{U(1)}) \xrightarrow{\beta} \check{H}^2(M, \mathbb{Z}) \xrightarrow{j_*} \check{H}^2(M, \underline{\mathbb{R}}) \xrightarrow{e_*} \cdots$$

donde de nuevo $\beta: \check{H}^1(M, \underline{U(1)}) \rightarrow \check{H}^2(M, \mathbb{Z})$ es un isomorfismo.

En este caso, la imagen de cada $c_{ij}: U_i \cap U_j \rightarrow U(1)$ no es todo el círculo, pues $U_i \cap U_j$ es contractible. Al pasar una semirecta desde el origen a través de un punto de $U(1)$ omitido de esa imagen, se determina una rama del logaritmo para la cual la función $b_{ij} := (2\pi i)^{-1} \log c_{ij}$ está bien definida. Así las cosas, se puede definir

$$a_{ijk} := \frac{1}{2\pi i} (\log c_{ij} - \log c_{ik} + \log c_{jk}).$$

Aunque en esta fórmula las tres ramas del logaritmo no tienen que coincidir, se obtiene así una función $a_{ijk}: U_i \cap U_j \cap U_k \rightarrow \mathbb{C}$ que obedece $\exp(2\pi i a_{ijk}) \equiv 1$ y por ende toma valores en \mathbb{Z} . Con $\beta_{\mathcal{U}}: [\mathbf{c}] \mapsto [\mathbf{a}]$, se procede como en el caso anterior.

4.7 Ejercicios sobre homología y cohomología

Ejercicio 4.1. Para cada espacio topológico X , sea $S_n(X)$ el grupo abeliano libre generado por los n -símplices singulares $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$. Si $f: X \rightarrow Y$ es una función continua, sea $f_*(\sigma) := f \circ \sigma \in S_n(Y)$. Comprobar que cada $S_n: \text{Top} \rightarrow \text{Ab}$ es un funtor, y que las diferenciales $\partial: S_n(X) \rightarrow S_{n-1}(X)$ son componentes de una transformación natural $\partial: S_n \Rightarrow S_{n-1}$.

Si $H_n(X)$ es la homología en grado n del complejo $(S_\bullet(X), \partial)$, concluir que $H_n: \text{Top} \rightarrow \text{Ab}$ es otro funtor.

El cálculo práctico de la homología singular de un espacio X usa una **triangulación**.⁴⁷ Este es una familia $\{\sigma_\alpha: \Delta^{n_\alpha} \rightarrow X\}$ de símplices singulares en X (de varios grados) que satisfacen: (a) cada σ_α es inyectivo sobre el interior de Δ^{n_α} ; (b) cada m -faceta $\sigma_\alpha \circ h_\beta: \Delta^m \rightarrow X$ es otro σ_β de esta familia; y (c) $A \subseteq X$ es un abierto de X si y solo si cada $\sigma_\alpha^{-1}(A)$ es un abierto de Δ^{n_α} . Si la familia es finita, la homología singular de X es la homología de la triangulación; es decir, se puede reemplazar $S_n(X)$ por el grupo abeliano generado por los σ_α con $n_\alpha = n$.

► En los cuatro ejercicios siguientes, se describe unas triangulaciones de varios espacios conocidos. En cada caso, se pide calcular su homología singular.

Ejercicio 4.2. El círculo $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ tiene una triangulación $\{v, f\}$ con un solo 0-símplice $v: e_0 \mapsto 1$ y un solo 1-símplice $f: (1-t, t) \mapsto e^{2\pi it}$. Comprobar que $H_0(S^1) = H_1(S^1) = \mathbb{Z}$ y $H_n(S^1) = 0$ para $n \geq 2$.



Figura 4.2: El toro \mathbb{T}^2 (izquierda) y el plano proyectivo \mathbb{RP}^2 (derecha)

Ejercicio 4.3. El toro \mathbb{T}^2 tiene la triangulación ilustrada al lado izquierdo de la Figura 4.2: un solo 0-símplice v ; tres 1-símplices f, g, h ; y dos 2-símplices σ, τ ; con las relaciones:

$$\partial f = \partial g = \partial h = v - v = 0; \quad \partial \sigma = f + g - h = -\partial \tau.$$

Identificar los ciclos y los bordes en cada grado, y demostrar que

$$H_0(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z}, \quad H_1(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \quad H_2(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z}.$$

⁴⁷Esta triangulación es un **Δ -complejo** en la terminología del capítulo 2 del libro: Allen Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

Ejercicio 4.4. El **plano proyectivo** \mathbb{RP}^2 tiene la triangulación ilustrada al lado derecho de la Figura 4.2: dos 0-símplices v, w ; tres 1-símplices f, g, h ; y dos 2-símplices σ, τ ; con las relaciones:

$$\partial f = \partial g = w - v; \quad \partial h = 0; \quad \partial \sigma = f - g - h; \quad \partial \tau = f - g + h.$$

Identificar los ciclos y los bordes en cada grado, y demostrar que

$$H_0(\mathbb{RP}^2) = \mathbb{Z}, \quad H_1(\mathbb{RP}^2) = \mathbb{Z}/2, \quad H_2(\mathbb{RP}^2) = 0.$$

Ejercicio 4.5. Una triangulación de la **esfera** \mathbb{S}^2 está dada por el **tetraedro** T , el complejo simplicial formado por los 4 vértices, las 6 aristas y las 4 facetas del 3-símplice Δ^3 , omitiendo el propio Δ^3 . Obtener relaciones entre estos 14 símplices, calcular $S_\bullet(T)$, y así demostrar que

$$H_0(\mathbb{S}^2) = \mathbb{Z}, \quad H_1(\mathbb{S}^2) = 0, \quad H_2(\mathbb{S}^2) = \mathbb{Z}.$$

Ejercicio 4.6. Si $\alpha = \sum_{|I|=k} \alpha_I(x) dx^I \in \mathcal{A}^k(\mathbb{R}^n)$ y $\beta = \sum_{|J|=l} \beta_J(x) dx^J \in \mathcal{A}^l(\mathbb{R}^n)$, comprobar las fórmulas:

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{kl} \beta \wedge \alpha, \quad d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta.$$

En general, si $\alpha \in \mathcal{A}^k(M)$ y $\beta \in \mathcal{A}^l(M)$ sobre una variedad diferencial de dimensión n , estas fórmulas son válidas carta por carta. Argüir que son globalmente válidas en $\mathcal{A}^\bullet(M)$.

Ejercicio 4.7. Una manera alternativa de definir formas diferenciales es la siguiente. Se define una **campo vectorial** $X \in \mathcal{X}(M)$ como un operador \mathbb{R} -lineal $X: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ que verifica la regla de Leibniz: $X(fg) = (Xf)g + f(Xg)$. El *corchete* $[X, Y]: f \mapsto X(Yf) - Y(Xf)$ y el *múltiplo* $hX: f \mapsto h(Xf)$, para $h \in C^\infty(M)$, son otros elementos de $\mathcal{X}(M)$. De esta manera, $\mathcal{X}(M)$ es un módulo sobre el anillo conmutativo $C^\infty(M)$. Las *1-formas diferenciales* sobre M son los elementos del módulo dual $\mathcal{A}^1(M) := \mathcal{X}(M)^* = \text{Hom}_{C^\infty(M)}(\mathcal{X}(M), C^\infty(M))$. Las *k-formas diferenciales* se identifican con las *aplicaciones multi- $C^\infty(M)$ -lineales alternadas* de $\mathcal{X}(M)^k$ en $C^\infty(M)$.

Si $\alpha \in \mathcal{A}^1(M)$, $\beta \in \mathcal{A}^2(M)$, $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$, sus derivadas exteriores se definen por:

$$\begin{aligned} d\alpha(X, Y) &:= X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha([X, Y]); \\ d\beta(X, Y, Z) &:= X(\beta(Y, Z)) - Y(\beta(X, Z)) + Z(\beta(X, Y)) \\ &\quad - \beta([X, Y], Z) + \beta([X, Z], Y) - \beta([Y, Z], X); \\ d\omega(X_1, \dots, X_{k+1}) &:= \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{j-1} X_j(\omega(X_1, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_{k+1})) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_{k+1}). \end{aligned}$$

Verificar que $d(d\alpha) = 0$, $d(d\beta) = 0$ y en general $d(d\omega) = 0$.

Ejercicio 4.8. Completar la demostración del Teorema 4.23, verificando que el homomorfismo conector $\delta[\omega] := [\xi]$ tiene el formato del enunciado (a partir del lema de la culebra). Además, comprobar que la clase $[\xi]$ no depende de la partición de la unidad $\{h_1, h_2\}$ usada en la construcción de ξ .

Ejercicio 4.9. Con el uso la sucesión de Mayer y Vietoris para la esfera \mathbb{S}^n (Ejemplo 4.24), hacer lo siguiente:

- (a) Verificar que $H_{\text{dR}}^1(\mathbb{S}^n) = 0$ para $n \geq 2$.
- (b) Demostrar que $H_{\text{dR}}^k(\mathbb{S}^{n-1}) \simeq H_{\text{dR}}^{k+1}(\mathbb{S}^n)$ para $k = 1, 2, \dots, n-1$.
- (c) Concluir que:

$$H_{\text{dR}}^k(\mathbb{S}^n) \simeq \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{si } k = 0, n; \\ 0, & \text{si } k = 1, 2, \dots, n-1. \end{cases}$$

Ejercicio 4.10. Demostrar el Escolio 4.29.

Ejercicio 4.11. Demostrar el Escolio 4.32.

Ejercicio 4.12. Demostrar el Escolio 4.33, al verificar la fórmula dada para el homomorfismo conector $\delta[\eta]$ y al mostrar que esta clase no depende de la partición de la unidad $\{h_1, h_2\}$ usada en su construcción.

Ejercicio 4.13. Demostrar el Escolio 4.37, por inducción sobre la cardinalidad m de un buen cubrimiento $\{U_1, \dots, U_m\}$ de la variedad M dada. [Indicación: colocar $U := U_1 \cup \dots \cup U_{m-1}$ y $V := U_m$.]

Ejercicio 4.14. En la demostración de la Proposición 4.38, se lee: *la transpuesta de una sucesión exacta de espacios vectoriales es exacta*. Demostrar esa afirmación.

Ejercicio 4.15. Calcular la cohomología de de Rham del toro \mathbb{T}^2 (Ejemplo 4.41).

Ejercicio 4.16. Si R es un anillo conmutativo, $x \in R$, sean $K(x)$ el complejo $0 \rightarrow R \xrightarrow{x} R \rightarrow 0$ de la Definición 4.42 y $K(x, y)$ el complejo de la fórmula (4.19). Demostrar que

$$K(x, y) \simeq K(x) \otimes_R K(y),$$

donde el lado derecho es un producto tensorial de complejos (Definición 3.34).

Ejercicio 4.17. Si R es un anillo conmutativo y si $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in R^n$, sea $K'(\mathbf{y})$ el complejo de Koszul homológico de la Definición 4.45 y el comentario después del Lema 4.47. En el caso $n = 1$, comprobar que $K'(y_1)$ coincide con $K(y_1)$. Demostrar además que

$$K'(y_1, \dots, y_n) \simeq K'(y_1) \otimes_R K'(y_2) \otimes_R \dots \otimes_R K'(y_n).$$

Ejercicio 4.18. Comprobar que el R -homomorfismo $\partial_\varphi: \Lambda^\bullet A \rightarrow \Lambda^\bullet A$ definido por la fórmula (4.22) satisface $\partial_\varphi^2 = 0$.

Ejercicio 4.19. Demostrar el Escolio 4.46.

Ejercicio 4.20. Completar los detalles del Ejercicio 4.48, donde $S = S^\bullet V$ es el álgebra simétrica del espacio \mathbb{F} -vectorial n -dimensional V :

- (a) Dadas bases duales $\{v_1, \dots, v_n\}$ de V y $\{f^1, \dots, f^n\}$ de V^* , se identifica $t = \sum_{i=1}^n f^i \otimes v_i$ con la n -tupla de elementos $(f^1 \otimes v_1, \dots, f^n \otimes v_n)$ de $V^* \otimes S$. Demostrar que el *complejo tautológico*:

$$K: 0 \longrightarrow S^\bullet V \xrightarrow{t} V^* \otimes S^\bullet V \xrightarrow{t} \Lambda^2 V^* \otimes S^\bullet V \longrightarrow \dots \longrightarrow \Lambda^n V^* \otimes S^\bullet V \longrightarrow 0.$$

es isomorfo al complejo de S -módulos $K(f^1 \otimes v_1, \dots, f^n \otimes v_n)$.

- (b) El complejo dual de K es el complejo de cadenas de S -módulos:

$$K': 0 \longrightarrow \Lambda^n V \otimes S^\bullet V \longrightarrow \dots \longrightarrow \Lambda^2 V \otimes S^\bullet V \xrightarrow{\tau} V \otimes S^\bullet V \xrightarrow{\tau} S^\bullet V \longrightarrow 0,$$

con diferencial $\tau: \Lambda^k V \otimes S^\bullet V \rightarrow \Lambda^{k-1} V \otimes S^\bullet V$ dada por

$$\tau((x_1 \wedge \dots \wedge x_k) \otimes \mathbf{y}) := \sum_{r=1}^k (-1)^{r-1} (x_1 \wedge \dots \wedge \widehat{x_r} \wedge \dots \wedge x_k) \otimes (x_r \vee \mathbf{y}).$$

Mostrar que $\tau^2 = 0$ y que el conúcleo de $\tau: V \otimes S^\bullet V \rightarrow S^\bullet V$ es isomorfo al cuerpo \mathbb{F} . Concluir que $\Lambda^\bullet V \otimes S^\bullet V \twoheadrightarrow \mathbb{F}$ es una resolución libre finita de \mathbb{F} como S -módulo.

- (c) Deducir que $\text{Tor}_k^{S^\bullet V}(\mathbb{F}, \mathbb{F}) \simeq \Lambda^k V$ para cada $k \in \mathbb{N}$.

► En los nueve ejercicios siguientes, G es un grupo (multiplicativo) y el grupo abeliano A es un G -módulo (izquierdo). El grupo abeliano \mathbb{Z} se considera como G -módulo trivial, salvo indicación contraria.

Ejercicio 4.21. Un grupo abeliano A cualquiera define un G -módulo *trivial* $\mathcal{I}A = A$. Así se define un funtor exacto $\mathcal{I}: \text{Ab} \rightarrow G\text{-Mod}$. Considérese los siguientes funtores $G\text{-Mod} \rightarrow \text{Ab}$:

- (a) El **subgrupo invariante** $\underline{A}^G := \{a \in A : g \cdot a = a \text{ para todo } g \in G\}$ define un funtor $(-)^G: G\text{-Mod} \rightarrow \text{Ab} : A \mapsto A^G$. Comprobar que A^G es el G -submódulo trivial maximal de A . Concluir que el funtor $(-)^G$ es un *adjunto derecho* de \mathcal{I} . (Por lo tanto, $(-)^G$ es exacto a la izquierda.)

- (b) El **G -módulo de coinvariantes** de A es $A_G := G/I_G A$ donde $I_G A$ es el G -submódulo de A generado por $\{g \cdot a - a : a \in A, g \in G\}$. Comprobar que A_G es el G -módulo cociente trivial maximal de A . Concluir que el funtor $(-)_G: G\text{-Mod} \rightarrow \text{Ab} : A \mapsto A_G$ es un *adjunto izquierdo* de \mathcal{I} . (Por lo tanto, $(-)_G$ es exacto a la derecha.)

Ejercicio 4.22. Si A y B son dos G -módulos, mostrar que $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, B)$ es un G -módulo bajo la acción $g \cdot \varphi(a) := \varphi(g^{-1} \cdot a)$ cuando $\varphi: A \rightarrow B$ es un homomorfismo.

Ejercicio 4.23. Demostrar que $A^G \simeq \text{Hom}_G(\mathbb{Z}, A) = H^0(G, A)$ y $A_G \simeq \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} A$.

[[Indicación: Para el segundo isomorfismo, comprobar que el funtor \mathcal{I} del Ejercicio 4.21 coincide con $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, -)$, aplicar la Proposición 2.74 y usar la unicidad esencial de funtores adjuntos.]]

Ejercicio 4.24. Sea $I_G := \ker(\varepsilon: \mathbb{Z}G \rightarrow \mathbb{Z})$. Si $\eta: I_G \rightarrow A$ es un G -homomorfismo, defínase $\phi_\eta: G \rightarrow A$ por $\phi_\eta(g) := \eta(g - 1)$.

- (a) Mostrar que $\eta \mapsto \phi_\eta$ es un isomorfismo de grupos abelianos $\text{Hom}_G(I_G, A) \simeq \text{Der}(G, A)$.
- (b) Comprobar que la imagen del subgrupo $A \leq \text{Hom}_G(I_G, A)$ es el grupo $\text{Ider}(G, A)$.
- (c) Usar la sucesión exacta $0 \rightarrow I_G \rightarrow \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0$ y la identificación $\text{Ext}_G^1(\mathbb{Z}, A) = H^1(G, A)$ para verificar que $H^1(G, A) \simeq \text{Der}(G, A)/\text{Ider}(G, A)$.

Ejercicio 4.25. Si $\psi: G \times G \rightarrow A$ es un sistema de factores, comprobar que la receta (4.28):

$$(a, g)(b, h) := (a + g \cdot b + \psi(g, h), gh)$$

define una ley de grupo asociativa sobre el producto cartesiano $G \times A$.

Ejercicio 4.26. Demostrar el Escolio 4.52.

Ejercicio 4.27. Sea C el grupo cíclico infinito⁴⁸ con generador t . Comprobar que la sucesión de C -módulos $0 \rightarrow \mathbb{Z}C \xrightarrow{\times(1-t)} \mathbb{Z}C \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0$ es exacta. Concluir que $H^0(C, A) \simeq A^C$ y $H^1(C, A) \simeq A_C$; y que $H^k(C, A) = 0$ para $k \geq 2$.

Ejercicio 4.28. Sea $C_n := \{1, g, g^2, \dots, g^{n-1}\}$ el grupo cíclico finito de orden n . Usar la resolución libre periódica del Ejercicio 3.5:

$$\dots \xrightarrow{\times N} \mathbb{Z}C_n \xrightarrow{\times(1-g)} \mathbb{Z}C_n \xrightarrow{\times N} \mathbb{Z}C_n \xrightarrow{\times(1-g)} \mathbb{Z}C_n \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

⁴⁸Entonces $\mathbb{Z}C \simeq \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ es el anillo de polinomios de Laurent en la incógnita t .

donde $N := 1 + g + \cdots + g^{n-1}$, para calcular estos grupos de cohomología:

$$H^k(C_n, A) = \begin{cases} A^{C_n} & \text{si } k = 0, \\ A^{C_n}/N \cdot A & \text{si } k = 2, 4, 6, \dots, \\ \{a \in A : N \cdot a = 0\}/(1 - g) \cdot A & \text{si } k = 1, 3, 5, \dots \end{cases}$$

Para el caso $A = \mathbb{Z}$, concluir que:

$$\begin{aligned} H^0(C_n, \mathbb{Z}) &= \mathbb{Z}; \\ H^k(C_n, \mathbb{Z}) &= \mathbb{Z}/n \quad \text{para } k \geq 2 \text{ par}; \\ H^k(C_n, \mathbb{Z}) &= 0 \quad \text{para } k \text{ impar}. \end{aligned}$$

Ejercicio 4.29. La **resolución barra no normalizada** se define como sigue. Sea $\widetilde{B}_0 := \mathbb{Z}G$. Para $n \geq 1$, sea \widetilde{B}_n el $\mathbb{Z}G$ -módulo libre con generadores denotados por $\langle g_0, g_1, \dots, g_n \rangle$, con cada $g_j \in G$, donde $g \cdot \langle g_0, g_1, \dots, g_n \rangle := \langle gg_0, gg_1, \dots, gg_n \rangle$. La diferencial $\tilde{\partial}: \widetilde{B}_n \rightarrow \widetilde{B}_{n-1}$ se define así:

$$\tilde{\partial}(\langle g_0, g_1, \dots, g_n \rangle) := \sum_{j=0}^n (-1)^j \langle g_0, \dots, \widehat{g_j}, \dots, g_n \rangle.$$

Comprobar que esta diferencial satisface $\tilde{\partial}^2 = 0$, así que $(\widetilde{B}_\bullet, \tilde{\partial})$ es un complejo de cadenas, aumentado por $\varepsilon: \widetilde{B}_0 \rightarrow \mathbb{Z}$.

Sea $D_n \subset \widetilde{B}_n$ del G -submódulo generado por las $(n+1)$ -túplas “degeneradas” tales que $g_j = g_{j+1}$ para algún j . Verificar que $\tilde{\partial}(D_n) \subseteq D_{n-1}$, así que se puede formar un complejo cociente con entradas \widetilde{B}_n/D_n .

Demostrar que los G -homomorfismos $\theta_n: \widetilde{B}_n \rightarrow B_n$ y $\phi_n: B_n \rightarrow \widetilde{B}_n$ dadas sobre generadores por:

$$\begin{aligned} \theta_n: \langle g_0, g_1, \dots, g_n \rangle &\mapsto g_0[g_0^{-1}g_1|g_1^{-1}g_2|\cdots|g_{n-1}^{-1}g_n], \\ \phi_n: [g_1|\cdots|g_n] &\mapsto \langle 1, g_1, g_1g_2, \dots, g_1g_2\cdots g_n \rangle \end{aligned}$$

determinan un isomorfismo de complejos entre $\widetilde{B}_\bullet/D_\bullet$ y la resolución barra “normalizada” B_\bullet de la Definición 4.54.

Ejercicio 4.30. Verificar que las diferenciales β de (4.31) y b de (4.32) cumplen $\beta^2 = 0$ y $b^2 = 0$, respectivamente.

Ejercicio 4.31. En el contexto de la fórmula (4.35), demostrar que la diferencial $1_X \otimes \beta'$ de (4.34) y β de (4.31) están entrelazadas por los isomorfismos entre los A - A -bimódulos $X \otimes_{A^e} B_n$ y $X \otimes A^{\otimes n}$.

Ejercicio 4.32. Los A - A -bimódulos $C^n(A, A^*) := \text{Hom}_{\mathbb{F}}(A^{\otimes n}, A^*)$ y $\text{Hom}_{\mathbb{F}}(A^{\otimes(n+1)}, \mathbb{F})$ son naturalmente isomorfos mediante la correspondencia $\varphi \leftrightarrow \psi$, dada por:

$$\varphi(a_1, \dots, a_n) : a_0 \mapsto \psi(a_0, a_1, \dots, a_n).$$

Comprobar que la correspondencia entre las diferenciales $b : C^n \rightarrow C^{n+1}$ es la siguiente:

$$\begin{aligned} b\varphi(a_1, \dots, a_{n+1}) &:= a_1 \varphi(a_2, \dots, a_{n+1}) + \sum_{j=1}^n (-1)^j \varphi(a_1, \dots, a_j a_{j+1}, \dots, a_{n+1}) \\ &\quad + (-1)^{n+1} \varphi(a_1, \dots, a_n) a_{n+1}; \\ b\psi(a_0, a_1, \dots, a_{n+1}) &:= \sum_{j=0}^n (-1)^j \psi(a_0, \dots, a_j a_{j+1}, \dots, a_{n+1}) + (-1)^{n+1} \psi(a_{n+1} a_0, a_1, \dots, a_n). \end{aligned}$$

Ejercicio 4.33. Demostrar el Escolio 4.63: el complejo $(C^{\bullet+1}(A, A^*), b')$ es acíclico.

Ejercicio 4.34. Demostrar el Escolio 4.69, mediante la variante cohomológica obvia de la Proposición 3.41.

Ejercicio 4.35. Demostrar el Escolio 4.73.

Ejercicio 4.36. Un cubrimiento $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i \in I}$ de una variedad M **refina** otro cubrimiento $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j \in J}$, escrito $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$, si hay una función $\sigma : I \rightarrow J$ tal que $V_i \subseteq U_{\sigma(i)}$ para todo i . Defínase $\sigma^{\natural} : C^k(\mathcal{U}, \underline{A}) \rightarrow C^k(\mathcal{V}, \underline{A})$ por $(\sigma^{\natural} \mathbf{c})_{i_0 \dots i_k} := \mathbf{c}_{\sigma(i_0) \dots \sigma(i_k)}$. Comprobar que $\sigma^{\natural}(\delta \mathbf{c}) = \delta(\sigma^{\natural} \mathbf{c})$, así que σ^{\natural} es un morfismo de complejos.

Si $\tau : I \rightarrow J$ es otra función con cada $V_i \subseteq U_{\tau(i)}$, defínase $S : C^{k+1}(\mathcal{U}, \underline{A}) \rightarrow C^k(\mathcal{V}, \underline{A})$ por

$$(S\mathbf{c})_{i_0 \dots i_k} := \sum_{s=0}^k (-1)^{k-s} \mathbf{c}_{\sigma(i_0) \dots \sigma(i_s) \tau(i_{s+1}) \dots \tau(i_k)}.$$

Demostrar que $S\delta + \delta S = \tau^{\natural} - \sigma^{\natural}$ para cada k . Concluir que hay un homomorfismo bien definido $\sigma_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}} = \tau_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}} : H^k(\mathcal{U}, \underline{A}) \rightarrow H^k(\mathcal{V}, \underline{A})$ toda vez que $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$. Si además $\mathcal{U} \leq \mathcal{V} \leq \mathcal{W}$, comprobar que $\sigma_{\mathcal{U}}^{\mathcal{W}} = \sigma_{\mathcal{V}}^{\mathcal{W}} \circ \sigma_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}$. Concluir que el colímite $\check{H}^k(M, \underline{A})$ de la fórmula (4.44) existe.

Ejercicio 4.37. Sea $U_j := \{e^{i\theta} \in \mathbb{S}^1 : (8j-5)\pi/12 < \theta < (8j+5)\pi/12\}$ para $j = 1, 2, 3$. Verificar que $\{U_1, U_2, U_3\}$ es un buen cubrimiento de \mathbb{S}^1 . Usarlo para calcular la cohomología de Čech $\check{H}^k(\mathbb{S}^1, \mathbb{R})$ para cada $k \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 4.38. Dado un buen cubrimiento \mathcal{U} de una variedad diferencial M , se puede definir un bicomplejo de cocadenas $E^{\bullet\bullet}(\mathcal{U})$ como sigue. Sea $E^{kl}(\mathcal{U}) := C^k(\mathcal{U}, \underline{A}^l)$, con coeficientes en l -formas sobre abiertos de M . Los componentes de $\omega \in C^k(\mathcal{U}, \underline{A}^l)$ son l -formas

$$\omega_{j_0 \dots j_k} \in \mathcal{A}^l(U_{j_0} \cap \dots \cap U_{j_k}).$$

Defínase las inclusiones

$$i: \mathcal{A}^l(M) \hookrightarrow E^{0l}(\mathcal{U}), \quad j: C^k(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \hookrightarrow E^{k0}(\mathcal{U})$$

al colocar $i(\omega)_{j_0} := (\omega \upharpoonright U_{j_0})$ y al tomar $j(c)_{j_0 \dots j_k} \in C^\infty(U_{j_0} \cap \dots \cap U_{j_k}, \mathbb{R})$ como la función constante de valor $c_{j_0 \dots j_k} \in \mathbb{R}$.

- (a) Las diferenciales $\delta: E^{kl}(\mathcal{U}) \rightarrow E^{k+1,l}(\mathcal{U})$ y $\partial: E^{kl}(\mathcal{U}) \rightarrow E^{k,l+1}(\mathcal{U})$ están dadas por

$$(\delta\omega)_{j_0 \dots j_{k+1}} := \sum_{r=0}^{k+1} (-1)^{k+1-r} \omega_{j_0 \dots \widehat{j_r} \dots j_{k+1}}, \quad (\partial\omega)_{j_0 \dots j_k} := (-1)^k d(\omega_{j_0 \dots j_k}).$$

Verificar que $\delta^2 = 0$, $\partial^2 = 0$ y $\delta\partial + \partial\delta = 0$ en cada caso.

- (b) Demostrar que $\text{im } i = \ker(\delta: E^{0l}(\mathcal{U}) \rightarrow E^{1l}(\mathcal{U}))$. Usar una partición de la unidad $\{h_j\}$ subordinada a \mathcal{U} , al estilo de la demostración de la Proposición 4.80, para comprobar que cada $\mathcal{A}^l(M) \xrightarrow{i} E^{\bullet l}(\mathcal{U})$ es una sucesión exacta de cocadenas.
- (c) Demostrar que $\text{im } j = \ker(\partial: E^{k0}(\mathcal{U}) \rightarrow E^{k1}(\mathcal{U}))$. Usar el Lema de Poincaré para comprobar que cada $C^k(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \xrightarrow{j} E^{k\bullet}(\mathcal{U})$ es una sucesión exacta de cocadenas.
- (d) Usar la Proposición 3.41 (o más bien, su análogo en cohomología) para concluir que $H^k(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \simeq H_{\text{dR}}^k(M)$ para $k = 0, 1, \dots, \dim M$.

¶ En consecuencia, las cohomologías $H^k(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ para todos los buenos cubrimientos \mathcal{U} de M coinciden; y al tomar el colímite, se obtiene $\check{H}^k(M, \mathbb{R}) \simeq H_{\text{dR}}^k(M)$. Es posible obtener un isomorfismo con cohomología singular, $\check{H}^k(M, \mathbb{R}) \simeq H^k(M, \mathbb{R})$, de manera similar.⁴⁹ Así se obtiene una demostración del teorema de de Rham. ¶

⁴⁹Este argumento se debe a André Weil, en su trabajo: André Weil, “Sur les théorèmes de de Rham”, *Commentarii Mathematici Helvetici* **26** (1952), 119–145. El Apéndice D del libro de Conlon, *op. cit.*, contiene una exposición detallada de estos isomorfismos.